DISCURSO
DEL
EXCMO. SR. DR.
D. JOSÉ JAVIER ETAYO GORDEJUELA

Soluciones Gráficas Chile, S. L. L.
C/. Chile, 27
Tel. 91 359 57 55
28016 MADRID
info@graficaschile.es

Excmo. Sr. Presidente,
Excmos. Sras. y Sres. Académicos,
Señoras y Señores:

Es costumbre iniciar la intervención en un acto como este expresando el agradecimiento a la corporación por el honor recibido. Pero aunque no lo fuera, ese sería en todo caso mi comienzo. Pueden creerme que nunca pensé que pudiera llegar este momento, que sin duda se debe a la benevolencia de los miembros de esta Real Academia. Por ello se lo agradezco a todos, de manera especial a los Sres. Académicos que presentaron mi candidatura, la Dra. Rosa Basante de la Sección de Farmacia, el Dr. Jesús López Medel de la de Derecho, y el Dr. Arturo Romero de la de Ciencias Experimentales. También quiero expresar mi reconocimiento singular a los que han de ser mis compañeros de la Sección de Ciencias Experimentales. Con algunos de ellos he compartido muchos años de actividad académica, y no puedo por menos que citar en este punto al Dr. Benjamín Fernández Ruiz y al Dr. José María Teijón. Pero todos los miembros de la Academia me han acogido con gran generosidad, que me comprometo a corresponder trabajando con denuedo.

Como es lógico, en ocasiones como esta hay más agradecimientos que expresar. En primer lugar debo mencionar a mis padres. Como ya expliqué al redactar mi tesis doctoral, a ellos debo un ambiente en que ser doctor era algo importante. Cuando yo nací, el único doctor en casa, y en la historia de la familia, era mi madre, que había obtenido el grado en 1955, con una tesis dirigida por el Dr. Casas Torres en Zaragoza, y defendida, de acuerdo con la normativa de la época, en la Universidad Central ante un Tribunal presidido por D. Amando Melón. En 1959 se doctoró mi padre, a partir de los años 80 seguimos los hijos, y es de esperar que pronto comience la siguiente generación.

En este mismo sentido tengo que rendir también gratitud al Dr. Emilio Bujalance, que dirigió mi tesis y con el que sigo colaborando más de 30 años después, así como a los demás compañeros con los que he compartido tanto tiempo de actividad universitaria, en la docencia, en la investigación y en la gestión.

No podría, naturalmente, omitir a Almudena, que ha compartido esta dedicación a la actividad universitaria de todo tipo. Y a tantas personas que, desde 1974, han convivido conmigo en el mundo académico, y en sus aledaños.

Y debo también mencionar en este momento al Dr. Amando Garrido, al que sucedo en la medalla 55 de esta Real Academia. Nacido en 1940, se licenció sucesivamente en Ciencias Químicas, en Ciencias Biológicas, en Veterinaria y en Farmacia. Obtuvo el grado de doctor en Ciencias Químicas en 1973, y el de doctor en Farmacia en 2002. Desde 1987 fue Catedrático de

Bioquímica y Biología Molecular en la Facultad de Veterinaria de la Universidad Complutense. Además de su ingente labor docente e investigadora que todos ustedes conocen bien, colaboró también en puestos de gestión, siendo por ejemplo Director de su Departamento durante siete años, y Director Académico en el Vicerrectorado de Investigación; como yo, por cierto. En el año 2000 fue elegido miembro de esta Real Academia, de la que fue Vicepresidente desde 2003 hasta 2006. Su prematuro fallecimiento en 2014 ha dejado un vacío imposible de llenar.

1. El tema de esta disertación

Lógicamente el discurso del académico recipiendario debe tratar un tema del ámbito científico en el que se desarrolla su actividad; lo cual me lleva, por fuerza, a elegir un tema de matemáticas. Esta elección ha de conjugarse con la obligada cortesía hacia los asistentes, que debe vedar un discurso en exceso técnico, más complicado aún de seguir al hacerse de viva voz y sin el apoyo, indispensable para nosotros, de la pizarra y la tiza. Ello es aún más patente en esta Real Academia, cuya nota más específica es la multidisciplinariedad.

Por estas razones he optado por elaborar un discurso que se divide de modo natural en dos partes. Una primera, por supuesto, matemática, en la que procuraré explicar uno de los campos concretos en los que se desarrolla mi labor investigadora desde la tesis doctoral. Lógicamente en la versión escrita se detallan con cuidado resultados y técnicas concretas, mientras que en la versión oral haré una descripción lo más detallada posible, pero sin tanto aparato técnico. Como se verá en esta exposición, muchos de los avances que hemos obtenido han venido al hilo de las sucesivas tesis doctorales de los miembros de la que podríamos llamar nuestra escuela. Este hecho, y las características de esta Real Academia, cuya distinción es la defensa del título de doctor, me han movido a elaborar la segunda parte. En ella les describiré un muy ambicioso proyecto en el que estamos embarcados los matemáticos a nivel mundial, que es la reconstrucción global de nuestra genealogía doctoral.

De acuerdo con lo antes indicado, la primera parte de este discurso tratará sobre las superficies de Klein no orientables, y sus grupos de automorfismos. Este tipo de superficies constituye una de las tres grandes familias, que podemos entender como nacidas a partir de las superficies de Riemann.

Así, las superficies de Riemann son superficies compactas, dotadas de un atlas analítico, y, en consecuencia, orientables y sin borde. Si relajamos estas dos condiciones, y permitimos que las superficies sean no orientables, o que tengan borde, y pedimos que el atlas sea dianalítico, tenemos dos nuevos tipos de superficies: las superficies de Klein con borde, y las superficies de Klein no orientables sin borde. Estas también son llamadas frecuentemente superficies de Riemann no orientables, por ejemplo, por David Singerman cuando las estudió en 1971, como después veremos. Las clásicas superficies de Riemann se convierten así en un caso particular, uno de los tres tipos de superficies de Klein.

Al estudio de estos tres tipos de superficies se ha dedicado mi actividad investigadora desde que obtuve el grado de doctor. Esta investigación se enmarca en una larga tradición en nuestra Facultad, que se ha manifestado en particular en sucesivas tesis doctorales, y por ello me ha parecido razonable que el discurso que debo pronunciar versara sobre estas cuestiones.

De las superficies de los tres tipos, quizá las que han recibido menos atención sean las no orientables sin borde; mientras que se estudian ya en mi tesis doctoral, y también en alguno de mis más recientes resultados, así como en la tesis doctoral que acabo de dirigir. Por ello este es el tema elegido: *Un estudio de las superficies de Klein no orientables.*

La herramienta fundamental para estudiar estas superficies está constituida por determinados grupos de isometrías del plano hiperbólico, y el estudio de estas cuestiones tiene una larga historia en nuestra Facultad, que podemos remontar a Tomás Rodríguez Bachiller (véase [18]).

En 1924, la Facultad de Ciencias de la Universidad de Madrid ofreció a su profesor Rodríguez Bachiller una pensión para que ampliara estudios de Matemática Superior en el College de France y en la Sorbona. A la vuelta, en la sesión de 6 de diciembre de 1924 informó a la Sociedad Matemática Española de su actividad en la capital francesa, señalando las tres cuestiones que ocuparon su atención; entre ellas, "*grupos discontinuos que se pueden hacer corresponder a las superficies, con objeto de determinar sus invariantes topológicos*". Está clara la relación de este tema de estudio con la uniformización de las superficies de Riemann y de Klein mediante los grupos Fuchsianos y NEC.

Rodríguez Bachiller se presentó a una cátedra de Análisis convocada en 1934, y al no presentarse el otro firmante, Ricardo San Juan, hizo en solitario todos los seis ejercicios, hasta que fue propuesto por el Tribunal el 29 de junio de 1935. Curiosamente, el 27 de agosto siguiente defendió su Tesis doctoral, que no era requisito necesario para presentarse, sino solamente para tomar posesión, y el 29 de agosto tomó posesión de la cátedra.

De inmediato dirigió sus primeras tesis. En 1940 la de Enrique Linés, y en 1941 las de Francisco Botella y Pedro Abellanas. Pasados más de treinta años, los tres, que enseguida consiguieron también sus cátedras, fueron profesores nuestros, perteneciendo cada uno a un Departamento distinto.

En particular, Don Francisco Botella obtuvo en 1942 la cátedra de Geometría Analítica de la Universidad de Barcelona, de la que se trasladó a Madrid en 1950. En esta Facultad su labor más notoria fue potenciar la docencia y la investigación en Topología, que había aparecido como una asignatura optativa en 1948. Entre sus discípulos doctorales figuró Joaquín

Arregui, también profesor nuestro, doctor en 1959, Catedrático de Algebra y Topología desde 1965, y Director del Departamento desde 1972 hasta 1998, sucediendo al que había sido su primer director, el prof. Etayo Miqueo, alumno a su vez del prof. Abellanas, y por lo tanto *primo* doctoral suyo.

Entre las tesis doctorales que dirigió D. Joaquín Arregui figura la de Emilio Bujalance, leída en 1980, "*Sobre los subgrupos normales cristalográficos no euclídeos*". Esta tesis doctoral, sobre cuyo contenido volveremos después, fue el inicio de la escuela que en España ha trabajado sobre los problemas que en este ejercicio se describen: esto es, las superficies de Riemann y de Klein, y sus grupos de automorfismos, así como muchos otros temas conexos.

2. Las superficies de Klein y sus grupos de automorfismos. Los grupos NEC

Vamos a centrarnos ahora en las superficies de Klein y en sus grupos de automorfismos. Describiremos también los grupos cristalográficos no euclídeos (grupos NEC) que serán la herramienta fundamental para su estudio.

Una superficie de Klein X es una superficie compacta dotada de una estructura dianalítica. Puede no tener borde y la estructura ser analítica, y entonces recuperamos las superficies de Riemann. O no teniendo borde, no ser analítica la estructura, y entonces tenemos las superficies de Klein no orientables sin borde, o superficies de Riemann no orientables. O, finalmente, tener borde, y entonces se trata de superficies de Klein con borde. A las no orientables sin borde van dirigidas las páginas que siguen, aunque alguna referencia se hará a los otros tipos de superficies de Klein.

La denominación de superficies de Riemann no orientables se debe a Singerman, en su artículo fundacional [37] de 1971. En ese mismo trabajo utilizó los grupos NEC que había introducido Wilkie en [41] para obtener tanto las superficies como sus grupos de automorfismos.

Un grupo NEC Γ es un subgrupo discreto del grupo de isometrías del plano hiperbólico $\mathcal{H}$, que puede incluir elementos que invierten la orientación, de modo que el cociente $\mathcal{H}/\Gamma$ sea compacto. Si un grupo NEC solamente contiene elementos que preservan la orientación, es un grupo Fuchsiano, y desde el siglo XIX se utilizó que estos grupos uniformizan las superficies de Riemann. Los grupos NEC que no son Fuchsianos se llaman grupos NEC propios. Si Γ es un grupo NEC propio, aquellos de sus elementos que preservan la orientación forman un subgrupo de índice 2 llamado el subgrupo Fuchsiano canónico de Γ, Γ^+. Asociada con cada grupo NEC Γ, hay una región fundamental, de la que Wilkie obtuvo una presentación mediante generadores y relaciones, que se puede expresar de modo resumido mediante la llamada signatura del grupo. La signatura es una colección de números y un signo, definida por Macbeath en [31], de la siguiente forma:

$$\text{(2.1)} \qquad \sigma(\Gamma) = (g, \pm, [m_1, \dots, m_r], \{(n_{i,1}, \dots, n_{i,s_i}),\ i = 1, \dots, k\}),$$

donde $g, k, r, m_i, n_{i,j}$ son enteros que satisfacen $g, k, r \geqslant 0$, $m_i \geqslant 2$, $n_{i,j} \geqslant 2$.

A los números m_i se les llama periodos propios. Los paréntesis $(n_{i,1}, \dots, n_{i,s_i})$ son los ciclo-periodos. Los números $n_{i,j}$ son los periodos del ciclo-periodo $(n_{i,1}, \dots, n_{i,s_i})$. Escribiremos $[-]$, $\{-\}$ y $(-)$ cuando $r = 0, k = 0$ y $s_i = 0$, respectivamente.

Al grupo NEC con signatura σ le corresponde la siguiente presentación:

$$\text{Generadores:} \quad \begin{array}{lll} x_i & i = 1, \dots, r; & \\ e_i & i = 1, \dots, k; & \\ c_{i,j} & i = 1, \dots, k; & j = 0, \dots, s_i; \\ a_i, b_i & i = 1, \dots, g; & (\text{si } \sigma \text{ tiene signo `+'}); \\ d_i & i = 1, \dots, g; & (\text{si } \sigma \text{ tiene signo `-'}). \end{array}$$

$$\text{Relaciones:} \quad \begin{array}{lll} x_i^{m_i} = 1; & i = 1, \dots, r; & \\ c_{i,j-1}^2 = c_{i,j}^2 = (c_{i,j-1}c_{i,j})^{n_{i,j}} = 1; & i = 1, \dots, k; & j = 1, \dots, s_i; \\ e_i^{-1} c_{i,0} e_i c_{i,s_i} = 1; & i = 1, \dots, k; & \\ \prod_{i=1}^{r} x_i \prod_{i=1}^{k} e_i \prod_{i=1}^{g} (a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}) = 1; & (\text{si } \sigma \text{ tiene signo `+'}); & \\ \prod_{i=1}^{r} x_i \prod_{i=1}^{k} e_i \prod_{i=1}^{g} d_i^2 = 1; & (\text{si } \sigma \text{ tiene signo `-'}). & \end{array}$$

En esa presentación, las isometrías x_i son elípticas, e_i, a_i, b_i son hiperbólicas, $c_{i,j}$ son reflexiones, y d_i son reflexiones sesgadas.

El área de la región fundamental del grupo NEC Γ con signatura $\sigma(\Gamma)$ es

$$\text{(2.2)} \quad \mu(\Gamma) = 2\pi \left(\eta g + k - 2 + \sum_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{s_i} \left(1 - \frac{1}{n_{i,j}}\right) \right),$$

con $\eta = 2$ ó 1 dependiendo de si el signo es '+' ó '-'. Existe un grupo NEC Γ con signatura (2.1) si y sólo si el lado derecho de la igualdad (2.2) es mayor que 0. Denotaremos por $|\Gamma|$ la expresión $\mu(\Gamma)/2\pi$ y la llamaremos el área reducida de Γ.

Ahora, dados dos grupos NEC, Γ y Λ, tales que Γ sea subgrupo de índice finito de Λ, se verifica que $|\Lambda : \Gamma| = \frac{|\Gamma|}{|\Lambda|}$. En particular, para el subgrupo Fuchsiano canónico de Γ, se verifica que $\mu(\Gamma^+) = 2\mu(\Gamma)$.

Estos grupos uniformizan las superficies, de tal modo que si X es una superficie no orientable, sin borde, de género topológico $g \geqslant 3$, existe un grupo NEC Γ, con signatura $\sigma(\Gamma) = (g, -, [-], \{-\})$, tal que $X = \mathcal{H}/\Gamma$. A estos grupos se les llama grupos NEC de superficie.

A su vez, también mediante los grupos NEC se pueden obtener los grupos de automorfismos de las superficies. El resultado inaugural y fundamental para ello fue obtenido por Singerman, cuyo Teorema 1 de [37] se puede reescribir del siguiente modo:

Teorema 1. *Sea $X = \mathcal{H}/\Gamma$ una superficie de Klein no orientable sin borde de género topológico $g \geqslant 3$. Una condición necesaria y suficiente para que el grupo finito G sea un grupo de automorfismos de X es que exista un grupo NEC propio Λ y un epimorfismo $\theta : \Lambda \to G$ tal que el núcleo de θ es Γ, y $\theta(\Lambda^+) = G$.*

Este resultado reconduce el problema de si G es grupo de automorfismos de una de estas superficies, a estudiar si existe el grupo NEC Λ que permita definir el adecuado epimorfismo, lo cual depende de las presentaciones mediante generadores y relaciones del grupo G. Como vimos antes, además, el orden de G, que es el índice $|\Lambda : \Gamma|$, es igual al cociente de las áreas reducidas, $\frac{|\Gamma|}{|\Lambda|}$.

Por otra parte, como $\theta(\Lambda^+) = G$, quiere decir que el mismo grupo G es grupo de automorfismos que preservan la orientación de una superficie de Riemann, la cubierta de dos hojas de X, que tiene género topológico $g-1$. Por lo tanto, los resultados conocidos sobre las superficies de Riemann clásicas se pueden utilizar al estudiar las no orientables. Además, el propio Singerman obtuvo en 1974 (véase [38]) la signatura del subgrupo Fuchsiano canónico de un grupo NEC dado.

El otro resultado fundamental para lo que sigue fue obtenido por Bujalance en 1983 ([6, Theorem 2.5]), y es el siguiente

Teorema 2. *Sea G un grupo finito. Entonces existe una superficie de Klein no orientable, sin borde, X, tal que G es un grupo de automorfismos de X.*

3. El género imaginario

Por lo tanto, dado un grupo finito cualquiera, existen superficies de Klein no orientables, sin borde, sobre las que actúa el grupo, y tiene sentido la siguiente definición, que se debe a May en un artículo de 2001, [32], aunque como se verá, existen resultados anteriores. May lo denominó *symmetric crosscap number*, que hemos traducido por género imaginario.

Definición 1. *Sea G un grupo finito. Llamaremos género imaginario de G, $\tilde{\sigma}(G)$, al menor de los géneros topológicos de las superficies de Klein no orientables, sin borde, sobre las que G actúa como grupo de automorfismos.*

4. La cota máxima. Los H*-grupos

Cronológicamente, los primeros resultados sobre los grupos de automorfismos de superficies de Klein no orientables, sin borde, buscaban obtener la cota máxima del orden del grupo en términos del género de la superficie. Imaginemos que tenemos una superficie $X = \mathcal{H}/\Gamma$ de género topológico g. Si el grupo finito G es grupo de automorfismos de X, según hemos visto se tiene que $G \approx \Lambda/\Gamma$, y $o(G) = \frac{|\Gamma|}{|\Lambda|}$. Como $|\Gamma| = g-2$, se tiene que $o(G) = \frac{g-2}{|\Lambda|}$. Por lo tanto, el máximo valor de $o(G)$ se obtiene para el mínimo valor (positivo) de $|\Lambda|$. Esta área reducida mínima es $1/84$, y corresponde al grupo NEC Λ de signatura $(0, +, [-], \{(2, 3, 7)\})$. Por lo tanto, un grupo finito G alcanza la cota máxima cuando existe un epimorfismo $\theta : \Lambda \to G$ tal que el núcleo de θ es Γ, $\theta(\Lambda^+) = G$, y Λ tiene signatura $(0, +, [-], \{(2, 3, 7)\})$. En ese caso, el orden de G es $\frac{g-2}{1/84} = 84(g-2)$. Estas condiciones para G se pueden expresar en términos de la existencia de una determinada presentación de G mediante generadores y relaciones. En concreto, para la existencia del epimorfismo prescrito es condición necesaria que G tenga la siguiente presentación parcial, junto con relaciones adicionales:

$$G = \langle A, B, C \mid A^2 = B^2 = C^2 = (AB)^2 = (BC)^3 = (CA)^7 = 1, \dots \rangle.$$

Singerman llamó a los grupos finitos que alcanzan esta cota H*-grupos. El nombre se debe a la analogía con lo que ocurre en las superficies de Riemann, que está estrechamente relacionado con lo que acabamos de ver. En efecto, la cota máxima para superficies de Riemann de género g es $84(g-1)$, y viene determinada por los grupos Fuchsianos de signatura $(0, +, [2, 3, 7])$, que es justamente la signatura de Λ^+. A los grupos finitos que alcanzan esta cota máxima en superficies de Riemann se les llama grupos de Hurwitz. Aplicando el teorema de Singerman, esto quiere decir que si un grupo finito G es un H*-grupo, entonces es un grupo de Hurwitz.

El primer grupo de Hurwitz fue encontrado por Klein, y es $PSL(2, 7)$ de orden 168, que actúa sobre una superficie de Riemann de género 3. Wiman obtuvo los grupos de mayor orden que actúan sobre las superficies de Riemann de géneros $4, 5$ y 6, que en ningún caso llegan a $84(g-1)$. Fue Macbeath quien encontró el siguiente ejemplo, al probar en [30] que $PSL(2, 8)$, de orden 504, actúa sobre una superficie de Riemann de género 7. Usando estos dos grupos como punto de partida, Singerman probó en [37] el siguiente resultado inicial en la búsqueda de H*-grupos:

Teorema 3. *El grupo $PSL(2, 7)$ no es un H*-grupo, el grupo $PSL(2, 8)$ sí es un H*-grupo.*

Por lo tanto existen H*-grupos, y además ser grupo de Hurwitz es condición necesaria pero no suficiente para ser H*-grupo. También obtuvo en el mismo artículo que existen infinitos géneros g tales que hay una superficie de género g que alcanza la cota máxima, pero sin dar el grupo. El resultado global sobre cuáles son los grupos $PSL(2,q)$ que son H*-grupos fue obtenido por Dame Wendy Hall en su tesis doctoral de 1977, ([29]) al probar el siguiente resultado:

Teorema 4. *El grupo $PSL(2,q)$ es un H*-grupo si se cumple alguna de las siguientes condiciones:*

i) $q = p$ es primo, $q \equiv 1$ ó 13 (mod 28).

ii) $q = p$ es primo, $q \equiv -1$ ó -13 (mod 28), y $3 - \tau_i^2$ es un cuadrado en $GF(p)$ para dos valores de i, donde τ_1, τ_2, τ_3 son las raíces del polinomio $\xi^3 + \xi^2 - 2\xi - 1 = 0$ en $GF(p)$.

iii) $q = p^3$ para un primo $p = 2$ ó $p \equiv 5, 9, -3, -11$ (mod 28).

Para los grupos alternados el resultado correspondiente fue obtenido por Conder en [12]. Su resultado se puede reescribir del siguiente modo:

Teorema 5. *Para todo $n > 167$ el grupo A_n es un H*-grupo.*

Además, si $n \leqslant 167$, A_n es un H*-grupo para todos los valores de n excepto una lista de ochenta que aparece en el antedicho resultado, en la que debe entenderse incluido el 139 omitido por error.

Estos se pueden considerar los primeros resultados que proporcionan el género imaginario de una familia de grupos. En efecto, si G es un H*-grupo, es un grupo de automorfismos de una superficie de género topológico $\frac{o(G)}{84} + 2$. Como $1/84$ es el área mínima posible para Λ, G no puede actuar sobre superficies de género menor, y en consecuencia, si G es un H*-grupo, $\tilde{\sigma}(G) = \frac{o(G)}{84} + 2$.

Otros resultados sobre cotas superiores para el orden del grupo de automorfismos de superficies de género dado, el denominado problema del orden máximo, se obtuvieron después para determinados tipos de grupos. De este modo, Bujalance y Gromadzki estudiaron en [10] los grupos nilpotentes, probando que si G es un grupo nilpotente que actúa sobre una superficie de género g, el orden de G es como máximo $8(g-2)$, y que esta cota se alcanza solamente para valores de $g-2$ potencia de 2. El propio Gromadzki en [27] estudió los grupos supersolubles, probando que para ellos la cota máxima es $12(g-2)$ y que se alcanza para todo $g = 3^n + 2$. A continuación, en [28], probó que la cota superior para grupos resolubles es $24(g-2)$.

Este fue el inicio, *avant la lettre*, del estudio del género imaginario de grupos finitos. Desde entonces se ha avanzado mucho hasta el momento presente; y se sigue trabajando, con algunos problemas importantes a punto de resolverse. Se pueden distinguir los siguientes aspectos fundamentales, todos ellos entrelazados, sobre los que se ha trabajado en paralelo:

1. El género imaginario de determinadas familias infinitas de grupos.
2. El género imaginario de los grupos de orden bajo.
3. Los grupos de género imaginario pequeño.

Del conjunto de resultados, y en especial de los obtenidos en el tercero de los aspectos indicados, se empiezan a obtener resultados sobre otros dos: la determinación del espectro del género imaginario, esto es, qué números son género imaginario de algún grupo:

4. El espectro del género imaginario.

Y, sobre todo, el que constituye el programa máximo:

5. Todos los grupos de automorfismos de las superficies de un género dado.

En lo que sigue, describiré, por ese orden, las cinco facetas indicadas del estudio del género imaginario, del modo más ordenado posible.

5. El género imaginario de familias infinitas de grupos

¿Cómo se obtiene el género imaginario de un grupo G? Puesto que hay que hallar el menor de los géneros de las superficies de las que es grupo de automorfismos, ha de existir un grupo NEC propio Λ y un epimorfismo $\theta : \Lambda \to G$ tal que el núcleo de θ es un grupo NEC de superficie Γ, con signatura $(g, -, [-], \{-\})$, y $\theta(\Lambda^+) = G$. Este no es, en general, un problema sencillo, porque la existencia de un epimorfismo de Λ en G con núcleo preestablecido es un caso particular de un problema indecidible, el problema de la palabra en teoría de grupos. Además, como queremos minimizar g, hemos de hallar el grupo Λ en estas condiciones que tenga área reducida mínima. Esta segunda parte es en general aún más difícil, al necesitar probar que no existe ningún grupo NEC con área menor que la de Λ que permita definir el adecuado epimorfismo. Ello exige conocer suficientemente la estructura algebraica del grupo G, pues involucra la existencia de una presentación suya mediante generadores y relaciones. Por ello la evolución de este epígrafe se ha producido complicando sucesivamente la estructura algebraica de los grupos en estudio.

El primer resultado en que se estudia por completo una familia infinita de grupos fue realizado por Bujalance en 1983, [6]. Se trata de los grupos cíclicos, y requiere un matiz. Como después comentaré, los grupos cíclicos actúan sobre superficies no orientables sin borde de género 1, y por lo tanto su género imaginario es 1. Sin embargo lo que Bujalance obtuvo fue el menor género $g \geqslant 3$, tal que un grupo cíclico dado C_n sea grupo de automorfismos de una superficie de género g. Este resultado es importante, porque servirá como cota inferior para el género imaginario de grupos que tengan elementos de orden n.

Por ello, en [24] definimos el parámetro $\tilde{\tau}(G)$ del siguiente modo:

Definición 2. *Sea G un grupo finito tal que $\tilde{\sigma}(G) < 3$. Llamaremos $\tilde{\tau}(G)$ al menor de los géneros topológicos mayores o iguales que* 3 *de las superficies de Klein no orientables, sin borde, sobre las que G actúa como grupo de automorfismos.*

En estos términos, el resultado para los grupos cíclicos se puede reescribir como sigue:

Teorema 6. *Sea C_n un grupo cíclico de orden n. Entonces*

i) Si n es primo impar, $\tilde{\tau}(C_n) = n$.

ii) Si $n \neq 2$ es par no múltiplo de 4, $\tilde{\tau}(C_n) = n/2$.

iii) Si n es múltiplo de 4, $\tilde{\tau}(C_n) = n/2 + 1$.

iv) Si n es impar, no primo, q es el menor factor primo de n, y q tiene multiplicidad 1, $\tilde{\tau}(C_n) = n - q - n/q + 2$.

v) Si n es impar, no primo, q es el menor factor primo de n, y q tiene multiplicidad mayor que 1, $\tilde{\tau}(C_n) = n - n/q + 1$.

vi) Si $n = 2$, $\tilde{\tau}(C_n) = 3$.

El paso siguiente son lógicamente los grupos abelianos no cíclicos, y el resultado correspondiente se obtuvo en dos pasos. A los de orden impar se dedica el capítulo 5 de mi tesis doctoral, [20]. El resultado que se obtiene es el siguiente:

Teorema 7. *Sea $G = C_{m_1} \times \cdots \times C_{m_s}$, donde cada m_i divide a m_{i+1}, un grupo abeliano no cíclico de orden impar N. Entonces $\tilde{\sigma}(G) = N(-1 + \sum_{i=1}^{s}(1 - \frac{1}{m_i})) + 2$.*

Este resultado fue completado para los grupos de orden par por Gromadzki en 1989, [26]. Vamos a respetar aquí la forma en que está expresado el resultado. En consecuencia, se distinguen dos casos, según que el 2-subgrupo maximal del grupo abeliano G sea cíclico o no. Si no es cíclico, se escribe $G = C_2^s \times C_{m_1} \times \cdots \times C_{m_k}$, donde s es tan grande como sea posible, cada m_i divide a m_{i+1}, y $m_1, \ldots, m_r$ son impares, $m_{r+1}, \ldots, m_k$ son pares. En cambio, si el 2-subgrupo maximal de G es cíclico, se escribe directamente $G = C_{m_1} \times \cdots \times C_{m_k}$, donde cada m_i divide a m_{i+1}. Con esta notación, el resultado es el siguiente.

Teorema 8. *Sea G un grupo abeliano no cíclico de orden N par, distinto de $C_2 \times C_{2m}$ y de $C_2 \times C_2 \times C_2$. Entonces $\tilde{\sigma}(G)$ vale*

i) Si el 2-subgrupo maximal de G no es cíclico:

i1) $N(s - 1 + \sum_{i=1} k - s(1 - \frac{1}{m_i})) + 2$, si $s \leqslant k - r$.

i2) $N(k - 1) + 2$, si $s - (k - r) = 2r$.

i3) $N(k - 1 + \frac{s-k-r+1}{4}) + 2$, si $s - (k - r) > 2r$.

i4) $N(\frac{k+s-r}{2} - 1 + \sum_{i=1}^{(k+r-s)/2}(1 - \frac{1}{m_i})) + 2$, si $0 < s - (k - r) < 2r$ y $s - (k - r)$ es par.

i5) $N(\frac{k+s-r-1}{2} - 1 + \sum_{i=1}^{(k+r-s-1)/2}(1 - \frac{1}{m_i}) + (1 - \frac{1}{2m_{(k+r-s+1)/2}})) + 2$, si $0 < s - (k - r) < 2r$ y $s - (k - r)$ es impar.

ii) Si el 2-subgrupo maximal de G es cíclico: $N(-1 + \sum_{i=1}^{k}(1 - \frac{1}{m_i})) + 2$.

Hay que observar que se han excluido algunos grupos, en concreto $C_2 \times C_{2m}$ y $C_2 \times C_2 \times C_2$. Ello se debe a que su género imaginario es 2, como veremos. Por ello lo que Gromadzki obtuvo aquí fue el parámetro $\tilde{\tau}$, con el siguiente resultado:

Teorema 9. *Si n es par, distinto de 2, $\tilde{\tau}(C_2 \times C_n) = n$. Además $\tilde{\tau}(C_2 \times C_2) = 3$ y $\tilde{\tau}(C_2 \times C_2 \times C_2) = 4$.*

El estudio del género imaginario se vio relanzado notablemente en 2001, cuando May publicó el fundamental artículo [32], en el que se define el concepto. El mismo indica que ya hay resultados anteriores, pero queda de manifiesto que ignora algunos, como ahora se verá. En primer lugar (Teorema A) demuestra el resultado que ya había probado Bujalance en 1983, esto es, que todo grupo finito G es grupo de automorfismos de alguna superficie no orientable sin borde. A continuación obtiene el género imaginario de los grupos que pertenecen a tres familias infinitas. Sorprendentemente, la primera son los grupos abelianos de la forma $(C_2)^a \times C_{m_1} \times \cdots \times C_{m_b}$, donde $a > b \geqslant 0$, $m_1 > 2$ y m_i divide a m_{i+1}; esto es, aquellos grupos abelianos en los que la mayor parte de los factores canónicos son iguales a C_2. Pero este problema estaba ya resuelto para todos los grupos abelianos; en particular para este caso concreto, en el trabajo de Gromadzki [26] de 1989. Las otras dos familias son nuevas, y vamos a transcribir los respectivos resultados.

Teorema 10. *Sea DC_n el grupo dicíclico de orden $4n$. Si $n \neq 3$, $\tilde{\sigma}(DC_n) = 2n + 2$; y $\tilde{\sigma}(DC_3) = 7$.*

Como después se verá, este resultado es importante a la hora de empezar a analizar el espectro del género imaginario.

Teorema 11. *Sea Q el grupo de los cuaterniones, de orden 8. Entonces el grupo $(C_2)^a \times Q$ tiene género imaginario $2 + 2^{a+1}(a + 2)$ para $a = 1$ ó 2, y $2 + 2^{a+1}(a + 3)$ para $a \geqslant 3$.*

En el mismo 2001, el propio May y Zimmerman volvieron a los grupos abelianos, dedicando dos páginas de [33] a obtener el género imaginario de los grupos $C_n \times C_n$. Para el caso en que n es impar, remitían a Tucker, [39], de 1991. En aquel trabajo de Tucker, éste decía que "*es probablemente factible computar $\tilde{\sigma}$ también para grupos abelianos de orden impar y rango mayor que 2*". Y tanto que era factible, lo había hecho yo en mi tesis en 1983, y lo había recuperado Gromadzki en su artículo de 1989. Coherentemente con este olvido de los resultados sobre grupos abelianos, entre los problemas abiertos que plantean los autores en [33] figura obtener el género imaginario de algunas familias infinitas de grupos, entre las que "*podría considerarse tratable la de los grupos abelianos*".

A partir de 2008, junto con Martínez, hemos determinado el género imaginario de varias familias infinitas de grupos. Los criterios para elegir dichas familias han sido fundamentalmente dos. En primer lugar, como se dijo antes, se trata de ir complicando progresivamente la estructura algebraica de los grupos finitos, de modo que se pueda resolver el problema. Y por otro, de buscar grupos cuyos géneros cubran el mayor número de posibles huecos en el espectro, de manera que se pueda determinar éste completamente. En este sentido, el primer avance se dio en [21], donde se consideran los productos directos del grupo cíclico C_m por el grupo diedral D_n de orden $2n$. El resultado que se obtiene es el siguiente

Teorema 12. *Sean m y n enteros mayores que 2. Entonces $\tilde{\sigma}(C_m \times D_n)$ vale*
i) $2 + mn - m - n$ *si m y n son impares.*
ii) a) $2 + n(m-1)$ *si m es impar, n es par, y $n \geqslant 2m$.*
ii) b) $2 + m(n-2)$ *si m es impar, n es par, y $n < 2m$.*
iii) $2 + n(m-2)$ *si m es múltiplo de 4 y n impar.*
iv) $2 + mn$ *si m y n son pares.*

El siguiente paso fueron los productos de dos grupos diedrales, que resolvimos en 2011 en [22] con el siguiente resultado:

Teorema 13. *Sean m y n enteros mayores que 2, o bien $m = 2$, $n \geqslant 4$ par. Entonces $\tilde{\sigma}(D_m \times D_n)$ vale*
i) $(m-1)(n-1) + 1$ *si m y n son impares.*
ii) $m(n-2) + 2$ *si m es impar y n es par.*
iii) $mn + 2$ *si m y n son pares.*

Nuestro último trabajo en este camino ha sido [23], de 2012, en el que consideramos dos familias de grupos: las obtenidas partiendo de los dos grupos no abelianos de orden 12 que quedaban por tomar, el dicíclico DC_3 y el alternado A_4, y hallando sus productos directos por los grupos cíclicos C_n. Los respectivos resultados fueron los siguientes:

Teorema 14. *El género imaginario del grupo $DC_3 \times C_n$ es*
i) $8n - 7$ *si n es impar, múltiplo de 3 pero no de 9.*
ii) $8n - 1$ *si n es impar y no está en el caso anterior.*
iii) $8n + 2$ *si n es par, no últiplo de 4, y distinto de 2 y de 6.*
iv) $9n - 10$ *si n es múltiplo de 4, ó $n = 6$.*
v) 14 *para $n = 2$.*

Teorema 15. *El género imaginario del grupo $A_4 \times C_n$ es*
i) $3n - 2$ *si n no es múltiplo de 3.*
ii) $8n - 10$ *si n es múltiplo de 3.*

Se ha obtenido el género imaginario de los grupos pertenecientes a otras familias infinitas, pero esto ha sido motivado directamente por el estudio del espectro, por lo que la explicación quedará más clara si la demoramos hasta ese momento.

6. El género imaginario de los grupos de orden bajo

El estudio sistemático del género imaginario para los grupos de orden bajo fue iniciado por May en [32]. En ese trabajo consideró los grupos de orden menor que 12, de entre los cuales solamente tres cumplen que $\tilde{\sigma}(G) > 2$. Se trata del grupo de los cuaterniones $Q \approx DC_2$ y el grupo dicíclico DC_3, que tienen género imaginario 6 y 7, respectivamente, según el resultado general para los dicíclicos que obtuvo May en ese mismo trabajo; y el grupo abeliano $C_3 \times C_3$, para cuyo género imaginario 5 remite a su trabajo con Zimmerman [33], y en éste, al trabajo de Tucker en 1991, [39]. Pero, como ya hemos comentado, ya estaba en mi tesis.

En 2013, junto con Martínez, extendimos el estudio a todos los grupos de orden menor que 32, en [24]. Con los resultados que hasta entonces se habían obtenido para familias infinitas de grupos, quedaban por estudiar trece grupos concretos: cinco de orden 16, uno de orden 18, uno de orden 20, el grupo no abeliano de orden 21, cuatro de orden 24 y uno de orden 27. El trabajo se realizó mediante un estudio, uno por uno, de cada uno de estos grupos, construyendo en cada caso el correspondiente epimorfismo de un grupo NEC Λ con área mínima, como se indicó en su momento.

El paso siguiente tiene otro cariz. En junio de 2013 Conder publicó en su página web de la Universidad de Auckland el documento [13]. En él aparece el género imaginario de todos los grupos hasta orden 127 inclusive. Los datos que se aportan para cada grupo son el género, y la signatura del grupo NEC. Los grupos finitos se identifican mediante su denominación en el sistema MAGMA. Esta descripción, extremadamente útil para poder trabajar tomándola como base, no aporta sin embargo ni la estructura algebraica del grupo finito, ni el epimorfismo θ de Λ en G que tenga como núcleo al grupo de superficie. Lógicamente, habida cuenta de su amplitud enorme, el trabajo fue realizado informáticamente mediante MAGMA.

En 2015, utilizando como base el listado de Conder, Bacelo en su tesis doctoral [2] ha identificado algebraicamente todos los grupos de orden menor que 64, confirmando sus géneros tal como los indicaba Conder mediante la construcción en cada caso del correspondiente epimorfismo. Cuando lleguemos al problema de determinar todos los grupos que actúan sobre superficies de un determinado género, veremos que esta identificación algebraica, que permita conocer la estructura de subgrupos de los grupos involucrados, es esencial.

7. Los grupos de género imaginario pequeño

Los primeros resultados sobre este particular fueron obtenidos por Tucker en [39], donde estudió precisamente los grupos cuyo género imaginario es menor que 3 y por lo tanto no se obtiene del modo que estamos considerando. En ese trabajo probó el siguiente resultado:

Teorema 16. *Los grupos de género imaginario* 1 *son los grupos cíclicos* C_n*, los grupos diedrales* D_n*, y los grupos* A_4, S_4 *y* A_5*.*

Como dijimos anteriormente, para estos grupos G que cumplen que $\tilde{\sigma}(G) < 3$, definimos el parámetro $\tilde{\tau}$, que es el menor de los géneros mayores que 2 de las superficies sobre las que actúa G. En [24] hemos obtenido $\tilde{\tau}$ para los grupos con $\tilde{\sigma} = 1$, del siguiente modo:

Teorema 17. *Sea* D_n *un grupo diedral de orden* $2n$*. Entonces*
i) Si n *es primo impar,* $\tilde{\tau}(D_n) = n$*.*
ii) Si $n \neq 2$ *es par no múltiplo de* 4*,* $\tilde{\tau}(D_n) = n/2$*.*
iii) Si n *es múltiplo de* 4*,* $\tilde{\tau}(D_n) = n/2 + 1$*.*
iv) Si n *es impar, no primo,* q *es el menor factor primo de* n*, y* q *tiene multiplicidad* 1*,* $\tilde{\tau}(D_n) = n - q - n/q + 2$*.*
v) Si n *es impar, no primo,* q *es el menor factor primo de* n*, y* q *tiene multiplicidad mayor que* 1*,* $\tilde{\tau}(D_n) = n - n/q + 1$*.*

No es ocioso comentar que en la demostración se usa que los valores obtenidos son exactamente los mismos que para el grupo cíclico C_n. Como el género imaginario del grupo cíclico es cota inferior para el del grupo diedral, basta con construir el epimorfismo requerido desde el grupo NEC Λ, y es innecesario demostrar que no existe otro para un grupo de área menor. Para los otros grupos con $\tilde{\sigma}(G) = 1$, obtuvimos

Teorema 18. *El parámetro* $\tilde{\tau}$ *vale* 4 *para los grupos* A_4 *y* S_4*, y* 5 *para el grupo* A_5*.*

Tucker obtuvo también los grupos de género imaginario 2, en el teorema 4.1 de [39], a saber:

Teorema 19. *Los grupos de género imaginario* 2 *son los grupos* $C_2 \times C_n$ *y los grupos* $C_2 \times D_n$*, para* n *par.*

Como $C_2 \times C_n$ es un grupo abeliano, ya comentamos el valor del parámetro $\tilde{\tau}$ para estos grupos, que fue obtenido por Gromadzki. En cuanto a $C_2 \times D_n$, lo calculamos en [24], del siguiente modo:

Teorema 20. *Sea* D_n *un grupo diedral de orden* $2n$*. Entonces* $\tilde{\tau}(C_2 \times D_n) = n$*.*

Recuérdese, como antes, que ya hemos visto que $\tilde{\tau}(C_2 \times C_n) = n$ y, por lo tanto, basta con ver que esta cota inferior se alcanza construyendo el oportuno epimorfismo.

El paso siguiente hace ya referencia a los géneros que se obtienen mediante nuestras técnicas, utilizando los grupos NEC, esto es, a partir de género 3. En [32], May probó, mediante un análisis caso por caso, el siguiente

Teorema 21. *No hay ningún grupo de género imaginario* 3*.*

Confirmaba así una conjetura que Tucker formuló en [39]. En el mismo año 2001, May y Zimmerman plantearon el estudio de los grupos de género 4 en [33]. Explicaban en su problema 3 que en el artículo [16] aparecen dos mapas que tienen género imaginario 4, cuyos grupos de automorfismos, que no identificaban, tienen orden 48; pero que podría haber otros grupos de orden menor, que tuvieran también género 4. En 2008, en [21] probamos directamente que el grupo $C_2 \times S_4$, que efectivamente tiene orden 48, tiene género 4.

Pero el estudio completo de los grupos de género 4 y 5 se realizó en [9], aparecido en 2014, pero recibido por la revista el 25 de septiembre de 2012, lo que hago notar por razones que luego se verán. En primer lugar se estudian los grupos de género imaginario 4. En ese momento se conocen dos, $C_2 \times S_4$ que habíamos obtenido en [21], y $C_2 \times A_4$ que como tiene orden 24, lo habíamos estudiado en [24]. Ahora demostramos que son los dos únicos, y en particular, que los dos de orden 48 señalados antes son ambos isomorfos a $C_2 \times S_4$; y por lo tanto,

Teorema 22. *Los grupos de género imaginario* 4 *son* $C_2 \times A_4$ *y* $C_2 \times S_4$.

Mucho más complicado resultó determinar cuáles son todos los grupos de género 5, que requirió distintas técnicas según que el orden de los grupos fuera menor o mayor que 36. Para el primer caso casi todo el trabajo estaba hecho, al haber estudiado ya todos los grupos de orden menor que 32. La parte más delicada fueron precisamente los grupos de orden 36, pero el resultado se completó con el siguiente

Teorema 23. *Hay ocho grupos de género imaginario* 5, *que son* $C_3 \times C_3, ((3,3,3;2))$, $C_3 \times D_3$, $(5,4,2)$, $D_3 \times D_3$, $(4,4 \mid 2,3)$, $(2,4,6;2)$ *y* S_5.

Para la descripción de los grupos $((3,3,3;2)), (5,4,2), (4,4 \mid 2,3)$ y $(2,4,6;2)$ se puede acudir, por ejemplo, a [17].

También para este problema el paso siguiente lo dio Conder en junio de 2013, al publicar en su página web el documento [14]. En él aparecen todos los grupos con género imaginario desde 4 hasta 65, ambos inclusive. Los datos que se aportan para cada grupo son, como en su otro listado, el género y la signatura del grupo NEC. Los grupos finitos se identifican mediante su denominación en el sistema MAGMA. Por supuesto, hay que señalar que cuando la colocó en la página, comprobamos que los resultados de [9], entonces ya aceptado y pendiente de aparecer, coincidían con los suyos, como así era, en efecto.

Este documento de Conder también fue aprovechado por Bacelo, que identificó la estructura algebraica de los grupos finitos que aparecen, y los epimorfismos correspondientes; primero, para género desde 6 hasta 9, en su Trabajo de Fin de Master [1], y después hasta género 17, en su tesis doctoral [2].

8. El espectro del género imaginario

Como ya hemos señalado, May probó que no hay ningún grupo con género 3, y planteó el problema de si sería un caso único, o bien habría otros números naturales en la misma situación. Por ello, en paralelo al cálculo del género imaginario de muchas familias de grupos, se ha ido persiguiendo encontrar grupos que cubrieran la mayor parte posible de los naturales, para descartar la existencia de otros huecos en el espectro, aparte del 3. El primer gran paso en ese sentido lo dio el propio May en [32], cuando obtuvo que para $n \neq 3$, $\tilde{\sigma}(DC_n) = 2n + 2$. Como también conocemos grupos de género 2, 4 y 8, tenemos todos los pares. Recopilando resultados de las familias que hemos descrito en las secciones anteriores, se consiguen grupos G con $\tilde{\sigma}(G) = n$ para todo $n \not\equiv 3, 7 \pmod{12}$, lo cual se puede resumir en el siguiente

Teorema 24. *i) Sea $n = 4k$, $k \geqslant 2$. Entonces $\tilde{\sigma}(C_4 \times D_{2k-1}) = n$.*
ii) Sea $n = 4k + 1$, $k \geqslant 1$. Entonces $\tilde{\sigma}(C_{2k+1} \times D_3) = n$.
iii) Sea $n = 4k + 2$, $k \geqslant 3$. Entonces $\tilde{\sigma}(C_3 \times D_{2k}) = n$.
iv) Sea $n = 12k + 11$. Entonces $\tilde{\sigma}(C_3 \times C_{6k+6}) = n$.

Como, por ejemplo, $C_2 \times A_4$, Q y DC_4 tienen, según hemos visto, género $4, 6$ y 10, respectivamente, solamente necesitamos estudiar las clases 3 y 7 (mod 12). Para la segunda, Conder ha obtenido en 2014, [15], una familia de grupos que cubre todos los números. Resumimos a continuación la construcción de su ejemplo.

Consideramos el grupo C_{3m} generado por el elemento v, y el producto semidirecto $C_{3m} \rtimes S_4$ en el que cada permutación impar de S_4 conjuga v a v^{-1}. Tomamos el subgrupo H_m de $C_{3m} \rtimes S_4$ generado por $w_0 = v(3,4), w_1 = (1,2)(3,4)$ y $w_2 = (1,3)$. El grupo H_m tiene orden $24m$. Entonces,

Teorema 25. *Sea $n = 12k + 7$. Entonces $\tilde{\sigma}(H_{4k+3}) = n$.*

Estos resultados reducen la determinación del espectro a estudiar si existe algún hueco que tendrá necesariamente que ser congruente con 3 (mod 12), aparte del propio 3. Por ello, desde hace años se han estudiado diversas familias infinitas de grupos cuyos géneros imaginarios sean de la forma $12k+3$. La más útil, por cubrir directamente la mitad de los números en cuestión, viene dada por el siguiente

Teorema 26. *Sea $n = 24k + 15$. Entonces existe un producto semidirecto $G_k = C_3 \rtimes C_{8+12k}$, tal que $\tilde{\sigma}(G_k) = n$.*

Por otro lado, Bacelo en su tesis [2], identificó un grupo de orden 40 y género 27. Trabajando con este ejemplo, y procurando extenderlo, llegamos al siguiente resultado, muy importante también para descartar posibles huecos.

Teorema 27. *Sea $n = 60k + 27$. Entonces existe un producto semidirecto $G_k = C_5 \rtimes C_{8+16k}$, tal que $\tilde{\sigma}(G_k) = n$.*

La demostración de estos dos últimos resultados no es en absoluto sencilla, especialmente a la hora de probar que el género obtenido es mínimo, y se puede ver en [4].

El siguiente resultado no aporta números en progresión aritmética, pero también sirve para descartar posibles huecos, y fue obtenido en [24]:

Teorema 28. *Sea $n = 12k+3$, tal que $n-2 = m^2$ es un cuadrado. Entonces $\tilde{\sigma}((3,3 \mid 3,m)) = m^2 + 2 = n$.*

Del mismo modo se comporta el siguiente, en el cual se utiliza el grupo no abeliano de orden $3p$ cuando existe, esto es, cuando $p \equiv 1 \pmod 3$:

Teorema 29. *Sea $n = 12k + 3$, tal que todos los factores primos de $n - 2$ son congruentes con $1 \pmod 3$. Entonces existe un producto semidirecto $C_{n-2} \rtimes C_3$ tal que $\tilde{\sigma}(C_{n-2} \rtimes C_3) = n$.*

Mediante el uso conjunto de todos los resultados que acabamos de enunciar, se obtiene que todos los números n tales que $3 < n \leqslant 2000$ pertenecen al espectro del género imaginario, salvo once que quedarían sin decidir. Sin embargo aún vamos a despejar la duda para tres de ellos. En primer lugar, exhibiendo una nueva sucesión aritmética de números que pertenecen al espectro, que parece muy caprichosa, pero sin embargo descarta dos de los números pendientes hasta 2000. Se utiliza para ella la determinación del género imaginario de los grupos abelianos que obtuvo Gromadzki.

Teorema 30. *Sea $n = 660k + 651$. Entonces el grupo $C_{11} \times C_{66k+66}$ tiene género imaginario n.*

El otro número que vamos a descartar requiere el estudio singular de un grupo. Se trata de 1443, que no queda cubierto por ninguno de los resultados anteriores. Detallaremos un poquito la demostración para que sirva de ejemplo sencillo de cómo se realizan en general.

Partimos del primo $131 \equiv 1 \pmod{13}$. El grupo será el producto semidirecto $C_{131} \rtimes C_{13}$, esto es, el grupo no abeliano de orden $13 \cdot 131$. Como 39 tiene orden 13 en $\mathbb{Z}_{131}^*$, el grupo admite una presentación mediante generadores X, Y y relaciones $X^{131} = Y^{13} = 1$, $XY = YX^{39}$. Entonces XY tiene orden 13, el grupo está generado por dos elementos de orden 13, y se tiene

$$\tilde{\sigma}(C_{131} \rtimes C_{13}) = \frac{11}{13}(131 \cdot 13) + 2 = 1443.$$

Reuniendo todos los resultados que han antecedido, tenemos el actual conocimiento de las condiciones necesarias para que un número n sea un hueco en el espectro. Intersecando la clase $3 \pmod{24}$ y $3, 15, 39, 51 \pmod{60}$, obtenemos cuatro clases $\pmod{120}$, a saber $3,\ 51,\ 75,\ 99$. Por lo tanto, tenemos:

Teorema 31. *Sea $n > 3$ un hueco del espectro del género imaginario. Entonces $n \equiv 3, 51, 75$ ó 99 (mod 120), $n \not\equiv 651$ (mod 660), $n - 2$ no es un cuadrado, y $n - 2$ tiene algún factor primo $p \equiv 2$ (mod 3), esto es, $p \equiv 5$ (mod 6).*

Si a este resultado unimos el ejemplo aislado que antes hemos indicado, quedan solamente ocho candidatos menores que 2000 a ser números que no pertenezcan al espectro, dados en la siguiente lista:

$$699,\ 915,\ 1083,\ 1179,\ 1515,\ 1539,\ 1635,\ 1923.$$

Por lo tanto el primer número del que no se sabe si es género imaginario de algún grupo es 699, uno de los dos únicos que quedan por decidir hasta 1000. Estos datos parecen apoyar muy fuertemente la conjetura de que en realidad el único número que no pertenece al espectro es 3, pero por ahora no podemos asegurarlo.

9. Todos los grupos de automorfismos de las superficies de un género dado

Como indicamos al principio, éste sería el objetivo último: determinar todos los grupos que son el grupo de automorfismos de todas las superficies de un tipo topológico dado, que en nuestro caso se reduce a las de un género topológico dado.

El primer paso fue la respuesta a este problema para los géneros $3, 4$ y 5, que obtuvimos en [9]. Vamos a continuación a describir el procedimiento seguido en ese trabajo, así como el resultado obtenido.

Para obtener los grupos completos de automorfismos de todas las superficies de género g se siguen tres pasos sucesivos. En primer lugar se necesita conocer cuáles son los grupos de género imaginario g (e inferiores). En segundo lugar se determinan todos los grupos que actúan como grupos de automorfismos de una superficie de género g. Obsérvese que este hecho, que es al que nos hemos referido a lo largo de toda la exposición, consiste en ser subgrupo del grupo de automorfismos de la superficie. Ya llegará después el momento de decidir si tenemos todo el grupo, o solamente un subgrupo suyo. Para determinar, como decimos, todos los (sub)grupos, hay dos facetas. En primer lugar, todos los grupos cuyo parámetro $\tilde{\sigma}$ ó $\tilde{\tau}$ vale g, necesariamente actúan sobre una superficie de género g. Pero para aquellos en los que $\tilde{\sigma}$ ó $\tilde{\tau}$ es menor que g, hay que averiguar si también lo hacen en superficies de este género. Por lo tanto, hay dos tipos de grupos, los que están directamente en la lista, y los que han de ser analizados.

Y llegamos al tercer paso, que es el más delicado. Hay que averiguar si el grupo que ha superado los filtros es el grupo completo de automorfismos de alguna superficie, o bien es siempre un mero subgrupo. Este problema se conoce como el de la "extensión de la acción". Solamente hay resultados globales para él cuando el grupo cuya acción se trata de extender es cíclico (véase en [7] el resultado de Bujalance, Cirre y Conder). En los demás casos, es necesario hacer el estudio individualizadamente, utilizando las técnicas que Bujalance diseñó en su tesis doctoral que mencionamos al principio.

El fundamento es el siguiente. Diremos que una signatura σ es maximal si para cada grupo NEC Λ' con signatura σ' que contenga a un grupo NEC Λ de signatura σ, tales que los espacios de Teichmüller de Λ y Λ' tengan la misma dimensión, se cumple que $\sigma = \sigma'$. En [8] probamos que si σ es una signatura maximal, existe un grupo NEC maximal, Λ, con signatura σ. Por otro lado, si σ no es maximal, el par $(\sigma,\, \sigma')$ se denomina un par normal si Λ es un subgrupo normal de Λ', y un par no normal si Λ es un subgrupo no normal de Λ'. Las listas completas de pares normales y no normales fueron obtenidas, respectivamente, por Bujalance en [5] y por Estévez e Izquierdo en [19]. Entonces, si un grupo finito G se escribe como Λ/Γ y la signatura de Λ no aparece en las listas, G es el grupo completo de automorfismos de la superficie $X = \mathcal{H}/\Lambda$. Alternativamente, si la signatura de Λ no es maximal, es posible que la acción de G se extienda a un grupo G' que contenga a G. En ese caso, tomamos el par $(\sigma,\, \sigma')$ y consideramos un grupo Λ' con signatura σ'. La acción de G se extiende a un grupo G' si para todo epimorfismo $\theta : \Lambda \to G$ con núcleo Γ, existe un epimorfismo $\theta' : \Lambda' \to G'$ cuya restricción a Λ es θ.

Utilizando esta técnica, en [9], una vez obtenidos los grupos que tienen género imaginario 4 y 5, determinamos todos los grupos que actúan sobre superficies de género $3, 4$ y 5, y a continuación, si eran el grupo completo para alguna superficie, o bien su acción siempre se extendía. De este modo obtuvimos el siguiente resultado:

Teorema 32. *Sea X una superficie de Klein no orientable, sin borde, de género topológico $3, 4$ ó 5. Entonces su grupo completo de automorfismos es uno de los siguientes:*

i) Si el género es 3, $C_2, C_2 \times C_2, D_3, D_4$ y D_6.

ii) Si el género es 4, $C_2, C_2 \times C_2, D_3, C_2 \times C_2 \times C_2, D_4, D_6, C_2 \times D_4, S_4$ y $C_2 \times S_4$.

iii) Si el género es 5, C_2, C_3, C_4, $C_2 \times C_2$, D_3, D_4, D_6, D_8, $C_3 \times D_3$, $((3,3,3;2))$, D_{10}, $\langle 5,4,2\rangle$, S_4, $D_3 \times D_3$, $(2,4,6;2)$ y S_5.

Además, para cada género y cada grupo, existe una superficie del género indicado que tiene como grupo completo de automorfismos el grupo dado.

El estudio se hace progresivamente más complicado según aparecen más grupos con estructura algebraica poco usual. Sin embargo, aprovechando que Bacelo ha identificado los grupos de género imaginario 6 en adelante, este es el paso siguiente: determinar todos los grupos completos de automorfismos de las superficies de género dado a partir de 6. Por ejemplo, para género 6, la situación es la siguiente:

Los grupos G con $\tilde{\sigma}(G) = 6$ son los siguientes: Q, $(4,4 \mid 2,2)$, QA_4, L_4, $\langle 2,2,2 \rangle_2$, $C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2$, $\Gamma_4 a_1$, $\Gamma_6 a_1$, $(2,5,5;2)$, $C_2 \times A_5$ y $((C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_5) \rtimes C_2$. (Véase [1]). Por lo tanto todos estos grupos actúan sobre alguna superficie de género 6.

Ahora, los grupos G con $\tilde{\tau}(G) = 6$ son $C_2 \times C_6$ y $C_2 \times D_6$, véase [24], y por lo tanto también estos grupos actúan sobre alguna superficie de género 6.

Pero hay que tener en cuenta ahora a todos los grupos G con $3 \leqslant \tilde{\sigma}(G) \leqslant 5$, o con $3 \leqslant \tilde{\tau}(G) \leqslant 5$, y comprobar uno a uno si son grupo de automorfismos de alguna superficie de género 6.

En ese momento, se tiene el listado completo de grupos candidatos, y hay que estudiar para cada uno si su acción se extiende, o bien se trata del grupo completo para alguna superficie.

Muy recientemente, siguiendo este procedimiento, Bacelo ha obtenido los grupos de automorfismos de todas las superficies de géneros 6 y 7, véase [3].

10. Relaciones con otros parámetros

Existen otros parámetros similares al género imaginario, definidos mediante los otros tipos de superficies. Así, si consideramos superficies de Riemann, el menor género de las superficies sobre las que actúa un grupo G es el género simétrico de G, $\sigma(G)$. Si obligamos a que los elementos de G conserven la orientación de la superficie, entonces se trata del género simétrico fuerte de G, $\sigma^0(G)$. Finalmente, si son superficies de Klein con borde, tenemos el género real de G, $\rho(G)$.

Dado un grupo G, existen relaciones entre los valores de estos parámetros. Una fundamental, que utilizamos para obtener los grupos de género imaginario $3, 4$ y 5, es que $\sigma^0(G) \leqslant \tilde{\sigma}(G) - 1$. Pero la que probablemente pueda aportar más información útil sea la que exista entre el género imaginario y el género real. El mejor resultado, por ahora, que liga ambos parámetros hace referencia a los grupos de orden impar. Para esos grupos tanto el género imaginario como el género real quedan determinados en función de un sistema de generadores cuyos órdenes sean mínimos en cierto sentido. En concreto, hemos probado en [4] el siguiente

Teorema 33. *Sea G un grupo no cíclico de orden impar N. Sea $\{x_1, \ldots, x_t\}$ un conjunto de generadores de G de órdenes $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_t\}$, elegidos de modo que $M = \sum_{i=1}^{t} (1 - 1/\lambda_i) - 1$ es mínimo entre los conjuntos de generadores de G. Entonces $\tilde{\sigma}(G) = MN + 2$.*

Este resultado se debe a que para grupos G de orden impar, la signatura de Λ con área mínima tiene la forma $(1, -, [m_1, \ldots, m_t], \{-\})$. Pues bien, si se trata de hallar el género real, que se hace de modo análogo, el resultado se obtiene para un grupo NEC con signatura $(0, +, [m_1, \ldots, m_t], \{(-)\})$, que tiene la misma área, y en consecuencia tenemos:

Teorema 34. *Si G tiene orden impar,* $\tilde{\sigma}(G) = \rho(G) + 1$.

Para grupos de orden par, este resultado no es cierto en general: la ventaja del orden impar es que determina el comportamiento de las reflexiones. Cuando G tenga orden par, para obtener el género real la signatura del grupo NEC ha de tener un ciclo-periodo vacío, o bien uno con dos periodos consecutivos iguales a 2, véase [11]. Este requisito no se da, como ya hemos visto en algunos ejemplos, a la hora de buscar el género imaginario, y por ello pueden resultar áreas mínimas distintas, y en consecuencia no darse la igualdad anterior. Pero la exploración de esta relación entre ambos parámetros, y lo que ya se sabe de sus respectivos espectros, sin duda ha de ser útil.

11. La dirección de tesis doctorales

Como se ha visto en la exposición que antecede, una parte muy sustancial de la investigación en este campo se ha realizado con ocasión de la elaboración de las tesis doctorales de sucesivas generaciones de matemáticos. La comunidad matemática internacional tiene un gran empeño en reconstruir la denominada genealogía doctoral. Se pretende con ello trazar las líneas que llevan de los actuales doctores, a los que les dirigieron sus respectivas tesis, y a los de éstos, y así sucesivamente hasta donde se pueda llegar.

La primera dificultad conceptual, por supuesto, es la definición de director de una tesis doctoral. Este es un concepto perfectamente acuñado hoy en día, pero mucho más laxo, o inexistente en la legislación y la práctica, si retrocedemos en el tiempo. En consecuencia, llega un momento en que al retroceder la relación, más que de doctorando y director, es algo más fluido de discípulo y maestro. Centrándonos en España, vamos a ir retrocediendo en la regulación normativa del doctorado para ver cómo se contempla al director de la tesis doctoral.

Como es sabido, en los últimos tiempos ha habido una proliferación de normas sobre las titulaciones universitarias, que complica sobremanera su conocimiento, incluso para los propios interesados. Así, la norma que actualmente rige los estudios de Doctorado es el Real Decreto 99/2011, de 28 de enero (BOE de 10 de febrero), por el que se regulan las enseñanzas oficiales de Doctorado. Su artículo 2.6 define al Director de la tesis como "*el máximo responsable del conjunto de las tareas de investigación del doctorando*", y la función de dirección se regula en el artículo 12. Desde el año 2011 en que se aprobó, este Real Decreto ha sido modificado tres veces. En particular, el artículo 2 se modificó por el Real Decreto 195/2016, de 13 de mayo (BOE de 3 de junio), de modo que la mención del director de la tesis se desplazó al apartado 4.

La norma anterior, a la que ésta vino a sustituir, era el Real Decreto 1393/2007, de 29 de octubre (BOE del 30), por el que se establece la ordenación de las enseñanzas universitarias oficiales. El Capítulo V de esta norma se dedica a los estudios de doctorado, y el director se contempla en el artículo 21.3, según el cual "*para la elaboración de la tesis doctoral, la Universidad asignará al doctorando un director*".

Este Real Decreto sustituyó a uno que tenía sólo dos años, el 56/2005, de 21 de enero (BOE del 25), por el que se regulan los estudios universitarios oficiales de posgrado. El capítulo III de este Real Decreto contempla los estudios de Doctorado, y en él el artículo 11.1 dispone que "*para la elaboración de la tesis doctoral, el órgano responsable del programa de Doctorado asignará al doctorando un director de tesis*".

Cambiando ya de milenio, la norma anterior era el Real Decreto 788/1998, de 30 de abril (BOE de 1 de mayo), por el que se regula el tercer ciclo de estudios universitarios, la obtención y expedición del título de Doctor y otros estudios de postgrado. Curiosamente, en esta norma no se define sustantivamente al director de la tesis doctoral, figura que parece darse por sobreentendida, de modo que en el artículo 7.3 se establece que "*para ser Director de tesis será necesario estar en posesión del título de Doctor*".

La primera regulación de los estudios de doctorado posterior a la Ley de Reforma Universitaria fue el Real Decreto 185/1985, de 23 de enero (BOE de 16 de febrero), por el que se regula el tercer ciclo de estudios universitarios, la obtención y expedición del título de Doctor y otros estudios postgraduados. También aquí, en el artículo 7.3, se daba por preexistente la figura del Director de la tesis, y se regulaba quiénes podían serlo. Hasta su derogación en 1998, este Real Decreto se modificó cuatro veces; en particular, el Real Decreto 537/1988, de 27 de mayo (BOE de 3 de junio), cambió la redacción del citado artículo 7.3, pero no alteró la filosofía del asunto. Un aspecto que merece señalarse de este Real Decreto 185/1985 es la previsión que introdujo en el artículo 9.3, según el cual "*en ningún caso podrá formar parte del Tribunal el director de la tesis*". Este Real Decreto, como desarrollo para esta materia de la Ley de Reforma Universitaria, tiene una extensísima disposición derogatoria, que comienza por las disposiciones sobre el doctorado de la Ley de 29 de julio de 1943 (BOE del 31), de Ordenación Universitaria.

A nivel reglamentario la norma fundamental que quedaba derogada era el Decreto de 25 de junio de 1954 (BOE de 12 de julio), por el que se regula el procedimiento para conferir el grado de doctor en todas las Universidades españolas. Con arreglo a este Decreto obtuve yo el doctorado en 1983, lo habían obtenido mis padres en los años 50, y sin duda buena parte de los doctores presentes. Merece pues que se transcriba íntegro el segundo párrafo del artículo 5º, que regula al Director de la tesis: "*Podrá ser director de tesis cualquier Catedrático o Doctor de Universidad española o un Profesor extranjero que pertenezca a Centro oficial equiparable a Facultad universitaria* *española. La designación de un Director que no sea Catedrático de la Facultad interesada tendrá que someterse previamente al acuerdo de la Junta de la misma.*" El artículo 7º establecía las normas para designar al Tribunal que juzgara la tesis, "*integrado por cinco Catedráticos numerarios, entre los cuales figurará el Director de la tesis cuando fuera Catedrático.*" La regulación del Tribunal fue modificada sucesivamente, por Decreto 2992/1972, de 19 de octubre (BOE de 6 de noviembre), Real Decreto 966/1977, de 3 de mayo (BOE del 7), y finalmente por Real Decreto 1063/1983, de 13 de abril (BOE de 2 de mayo). En particular, este último tenía un artículo 5º de texto muy breve: "*El Director de la tesis doctoral formará siempre parte del Tribunal correspondiente*". Como ya hemos visto, sólo dos años después, en 1985 un nuevo Real Decreto aprobado por el mismo Gobierno disponía que en ningún caso el director formara parte del Tribunal. Un curioso modo de pasar rápidamente de ser obligatorio a estar prohibido.

Con anterioridad a esta norma, y en desarrollo directo de la Ley de 1943 que había previsto la progresiva autorización a todas las Universidades para impartir el grado de Doctor, se dictó el Decreto de 29 de abril de 1944 (BOE de 7 de mayo), por el que se dan normas para la concesión del grado de Doctor en las Universidades de provincias. En este Decreto se fijaban las condiciones que había de reunir cada Universidad para lograr la autorización, que incluían, según el artículo 3º c), "*haber sido dirigidas por una mayoría del profesorado, en el plazo [de cinco años], suficiente número de tesis doctorales que hubiesen merecido sanción favorable.*" Por lo tanto, ya en este momento la figura del director estaba consolidada.

Ya antes de la Ley de 1943, por Decreto de 24 de agosto de 1932 (Gaceta del 27), relativo a la obtención del grado de Doctor, se establecía en el artículo 2º que "*en la Facultad de Filosofía y Letras de la Universidad de Madrid, desde Octubre de 1932, y en las demás Facultades de todas las Universidades, desde Octubre de 1933, el Doctorado se obtendrá por la aprobación de una tesis sobre algún tema contenido en cualquiera de las disciplinas que integran las enseñanzas de las Facultades*". En el preámbulo de este Decreto refrendado por el Ministro Fernando de los Ríos, se decía que "*el Doctorado ha de orientar al alumno en el proceso de las indagaciones personales. Sólo cuando esta obra asidua, intensa y de esfuerzo individual llega a un mínimo de madurez, procede dar el título de Doctor*". Pese al canto al esfuerzo individual, ya estaba presente el director de la tesis: el artículo 3º b) contempla la figura del director, que deberá guiar al alumno en sus lecturas e indagaciones (art. 4º) y autorizar la presentación de la tesis (art. 5º) en la que se hará constar el nombre del catedrático Director de trabajos (art. 7º). Sin embargo, la efectividad de este Decreto fue suspendida por otro de 15 de septiembre de 1933 (Gaceta del 17), suspensión que se mantuvo por otro de 19 de junio de 1935 (Gaceta del 21).

Al no ponerse en efectividad el Decreto de 1932, subsistía la regulación que había aprobado el Real Decreto-Ley de 19 de mayo de 1928 (Gaceta del 21), relativo a la reforma de los estudios universitarios. Los artículos 58 y siguientes de esta norma regulaban los estudios de Doctorado. Según el artículo 61, "*los ejercicios del grado de doctor consistirán: 1º) En una tesis de libre elección del aspirante, en la cual se den a conocer los resultados obtenidos en un trabajo de investigación propia, relativo a la disciplina fundamental*". Además de esa tesis original, había de presentar otra, en la que explicara el estado actual de los conocimientos en una cuestión que le plantearía el tribunal con un mes de antelación. El artículo 63 regula la figura del padrino; resumiendo, la tesis de libre elección será presentada por un padrino, Catedrático de cualquier Universidad, que responderá ante el Tribunal de la exactitud de cuanto de su labor personal exponga el graduado. Ya se preveía entonces que el padrino sería miembro nato del Tribunal, que podría solicitar de él aclaraciones sobre el trabajo.

Esta regulación con una doble tesis, la de investigación y la otra, fue mantenida literalmente en el Real Decreto relativo al Estatuto general de la Enseñanza universitaria, de 25 de septiembre de 1930 (Gaceta del 29). El último párrafo del artículo 37 de este Real Decreto contemplaba que con sólo la segunda tesis y el dictamen del padrino, provisionalmente favorable a la original, el graduando podía firmar y actuar en oposiciones y aun ganarlas, y tomar posesión de la cátedra teniendo dos años de plazo para ultimar el grado de doctor. Ello explica la peculiar posición del Dr. Rodríguez Bachiller a la que hacíamos mención al comienzo de esta disertación.

12. Las tesis doctorales

La primera exigencia general de elaboración de una tesis original para obtener el grado de doctor había llegado en 1901. Por Real Decreto de 10 de mayo de 1901 (Gaceta del 15) se había aprobado el Reglamento de exámenes y grados en las Universidades, Institutos, Escuelas Normales, de Veterinaria y de Comercio. El artículo 16 de este Reglamento se dedicaba al título de Doctor: "*Para obtener el grado de Doctor en cualquier Facultad, necesita el graduante presentar un trabajo inédito de investigación propia, y referente a un punto general o especial de libre elección dentro de los estudios propios de cada Facultad*". Esta es la primera ocasión en que se deja meridianamente clara la necesidad de que el aspirante a obtener el título de doctor elabore un trabajo original de investigación. Pero aquí se hace recaer sobre él la carga, sin que se mencione para nada la existencia de director.

Así, podemos tomar como ejemplo, la tesis de Julio Rey Pastor, que se leyó el 5 de julio de 1909. Con ocasión del centenario de su nacimiento, la Universidad Complutense editó una versión facsímil del original manuscrito, [36]. Por una parte hay que señalar que no se hace ninguna mención a la existencia de director. Ello no quiere decir que el doctorando trabaje solo, sino que la figura no existe legalmente. Pero él alude reiteradamente a D. Eduardo Torroja, al que llama siempre "querido maestro", y al que sigue en los métodos que utiliza. Y muy significativo también, en la página 11 de la introducción, dice explícitamente que "*sinceramente creo haber cumplido el precepto de la ley, haciendo alguna labor original siquiera esta sea muy pobre*". Por lo tanto, se había instalado ya en el pensar de la época lo que disponía el Reglamento de 1901.

Precedentes sectoriales a la exigencia general de elaboración de una tesis original para obtener el grado de doctor se pueden encontrar en Farmacia y Medicina. Por Real Decreto de 16 de septiembre de 1886 (Gaceta del 19) se reformaron los estudios de la Facultad de Medicina. El artículo 17 de este Real Decreto, dedicado a la obtención del título de doctor, dispone que "*el examen consistirá en la lectura de una tesis compuesta por el graduando sobre un punto doctrinal o de investigación práctica elegido libremente, que entregará manuscrito en el acto de solicitar examen*". Por otro Real Decreto de 24 del mismo mes (Gaceta del 25) se reformaron los estudios de la Facultad de Farmacia. El artículo 12 de este Real Decreto, tiene exactamente la misma redacción anterior. Hay que observar que no se exige originalidad en esa redacción, pero se había dado el primer paso hacia nuestro concepto actual de las tesis doctorales.

Resumiendo. Por lo que toca a la legislación española, las tesis doctorales con su componente de trabajo original de investigación se hacen obligatorias en 1901. Y aunque un Real Decreto de 1917 que suprimió las reválidas de todo el sistema educativo las dejó sin efecto, al año siguiente y mientras se decidía cómo operar con las reválidas, repuso la obligatoriedad de la tesis doctoral para obtener el título de doctor. En cuanto al director, aparece por primera vez en la normativa en 1928 como padrino de la tesis, que la presenta; y desde 1932 se le llama director. Aunque este Decreto de Fernando de los Ríos fuera dejado sin efecto, la denominación quedó acuñada, y en la siguiente regulación, a partir de 1943, se dio por entendida.

13. La genealogía doctoral

Vamos pues, como prometíamos y una vez aclarados los términos, a procurar la reconstrucción de la genealogía doctoral del grupo de investigación en superficies cuyos resultados recogimos en la primera parte de esta disertación. Iniciábamos entonces el relato con Tomás Rodríguez Bachiller (1899-1980), que se doctoró en 1935 con una tesis doctoral titulada "*Axiomática de la dimensión*". La base de datos del Mathematics Genealogy Project (en adelante MGP) le atribuye 648 descendientes doctorales, producidos por siete estudiantes a los que dirigió la tesis. Estos fueron, cronológicamente, Enrique Linés (1940), Pedro Abellanas y Francisco Botella (ambos 1941), Federico Gaeta (1945), Antonio Plans (1951), José Ramón Fuentes (1952) y Baltasar Rodríguez-Salinas (1954). El repaso de estos nombres deja claro cuál es la procedencia de muy buena parte del plantel matemático actual en España, y desde luego en Madrid. Como ya se indicó al principio, nuestro linaje procede de D. Francisco Botella, que es mi *bisabuelo* doctoral.

Para hallar sucintas biografías de los profesores españoles que se citan a continuación, una buena referencia es el libro de Outerelo, [35].

La tesis de Rodríguez Bachiller fue dirigida por José María Plans Freyre (1878-1934), el padre de Antonio Plans, a su vez discípulo de Bachiller. Así aparece en MGP, pero se añade un segundo “advisor”, José Gabriel Alvarez Ude, lo cual, como se verá, es muy relevante. Si nos remontamos una generación, a José María Plans, de éste no aparece en MGP ni dato sobre la tesis, ni mucho menos director, por lo que aquí se detendría la pesquisa genealógica. Sí figuran cinco tesis dirigidas por él; en algunos casos, como ya sabemos por razón de fecha, *avant la lettre*: Fernando Lorente de No (1918), Pedro Puig Adam (1921), María del Carmen Martínez Sancho (1927, la primera mujer española doctora en Matemáticas), Francisco Navarro Borrás (1929) y el propio Rodríguez Bachiller.

La tesis de la Dra. Martínez Sancho nos permite comprobar cuál es el carácter de esa relación entre maestro y discípulo, antes del establecimiento formal de la figura del director de la tesis. En la introducción, escribe que “*Enterado el Catedrático D. José María Plans del estudio que sobre espacios normales hube de hacerle, (...) me animó a continuar el estudio empezado y me sugirió la idea (...). Estos son los puntos principales que trato en esta memoria, que, como ya he dicho, fueron iniciados por el Catedrático D. José María Plans. No me queda en este breve prólogo más que dar las gracias (...) pues si no hubiera sido por las bondadosas excitaciones de D. José María Plans, D. José Gabriel Alvarez Ude y D. Tomás Rodríguez Bachiller, seguramente no me hubiera decidido a presentar esta tesis doctoral.*”

El Dr. Plans falleció en 1934, antes de la defensa de la tesis de Bachiller, lo que quizá motivara que Alvarez Ude debiera apadrinarla más o menos formalmente. Por la necrológica de Plans escrita por su discípulo Navarro Borrás ([34]) obtenemos más información sobre su doctorado: “*Recién doctorado, en 1899 oposita ...*”. Y a continuación explica que su primer trabajo de investigación es el que presenta en 1909, que se publicó en la Revista de la Real Academia de Ciencias. De modo que ya tenemos aproximadamente la fecha del doctorado de Plans, y como es anterior al Reglamento de 1901, sabemos que la tesis correspondiente no fue un trabajo de investigación, como se corrobora con que el primero lo elaborara diez años después.

Esto nos lleva al otro maestro de Rodríguez Bachiller, José Gabriel Alvarez Ude (1876-1958). Outerelo nos explica en [35] que Alvarez Ude cursó el Doctorado en Ciencias Físico-Matemáticas en la Universidad de Madrid, y que era el discípulo predilecto de D. Eduardo Torroja. De la tesis de Alvarez Ude no hay datos en MGP, solamente se dice que el director fue Torroja.

Como en 1902 ya era Catedrático en la Universidad de Zaragoza, debió alcanzar el título de doctor antes del Reglamento de 1901. Constan, eso sí, tres tesis dirigidas por él, la de José María Iñiguez (1918), y las de Germán Ancochea y Bachiller, ambas en 1935.

Por su carácter de discípulo de D. Eduardo Torroja Caballé (1847-1918), ésta es la generación anterior, y como veremos la última que podemos trazar en España. D. Eduardo Torroja se doctoró en 1873. Pero esto requiere un poco de análisis. En primer lugar, recordemos que estamos antes del Reglamento de 1901, el que exigió aportaciones originales a las tesis. Los estudios de la Facultad de Ciencias se habían reformado por Real Decreto de 24 de octubre de 1866 (Gaceta del 25) que, en lo tocante a los estudios de doctorado, se limitaba en el artículo 5 a enunciar las asignaturas del curso de doctorado de cada una de las dos secciones, y a autorizar a los que fueran licenciados en ambas a estudiar en un curso ambos doctorados, y obtener el título de Doctor en Ciencias. Este Real Decreto, lógicamente, era desarrollo de la celebérrima Ley Moyano; con propiedad, Ley de Instrucción Pública de 9 de septiembre de 1857 (Gaceta del 10). El artículo 32 de esta Ley determinaba que "*los estudios de facultad se harán en tres periodos, que habilitarán respectivamente para los tres grados académicos de Bachiller, Licenciado y Doctor*". La regulación del modo de obtener el título de doctor venía de 1847. Por Real Decreto de 8 de julio (Gaceta del 12) se aprobó el plan de estudios que fijaba *definitivamente* las bases de la instrucción pública en España. El Título III del Real Decreto, bajo la rúbrica "*De los estudios superiores*", disponía en el artículo 21 que "*son estudios superiores los que sirven para obtener el grado de doctor en las distintas facultades, ó bien para perfeccionarse en los varios conocimientos humanos.*" El artículo 22 recoge las asignaturas para estos estudios superiores, y el 23 establece que "*el grado de doctor exigirá uno o dos años de estudios superiores después de la licenciatura, según se prescriba en los reglamentos*". Estos reglamentos llegaron el mismo año 1847, por Real Decreto de 19 de agosto, por el que se manda observar y cumplir el reglamento para la ejecución del plan de estudios de 8 de julio (Gacetas de 22, 23, 24, 25 y 26). Los artículos 326ss. (Gaceta del 26) se dedican al título de doctor. Por lo que nos interesa, la regulación de la tesis, el artículo 339 dispone que "*el candidato escribirá una tesis sobre un punto cualquiera de la facultad o ciencia, y la imprimirá, entregando al rector, con la anticipación de ocho días, el suficiente número de ejemplares para repartir al claustro. Llegado el día de la ceremonia, después de ser introducido en la sala por el padrino, como en el caso de la licenciatura, leerá el impreso que se distribuirá entre los circunstantes, teniendo obligación el graduando de sostener su tesis durante media hora contra los argumentos que le hagan los catedráticos. Transcurrido que sea dicho tiempo, el presidente le recibirá el juramento y conferirá el grado con las insignias*". Esta fue la primera norma española que contempla las tesis doctorales, por supuesto, y como ya sabemos hasta 1901, sin ninguna exigencia de ser un trabajo original, o de investigación.

Pues bien, hora es de volver al Dr. Torroja. Según MGP, se doctoró en la Universidad de Madrid con una tesis titulada "*On Staudt's method of Projective Geometry*", dirigida por Karl Georg Christian von Staudt. De este modo nuestro linaje entroncaría con la matemática alemana, y como luego se indicará sucintamente, *emparentaría* con lo más granado de sus representantes. En cambio, Outerelo recoge en su libro [35] que obtuvo "*el grado de Doctor en Ciencias (Sección de Exactas) el 28 de febrero de 1873 con la memoria Idea de la generación elemental de las superficies y leyes fundamentales que rigen la curvatura de las mismas.*" Ignoro cuál sea la fuente que aportó el dato incluido en MGP, pero no cabe duda de que la versión correcta es la de Outerelo. Y hay que analizar qué significa la referencia a Staudt como "advisor" de la tesis de Torroja. La fuente más directa es la necrológica que escribió su discípulo Miguel Vegas, [40]. En ella recoge cuidadosamente los títulos de Torroja, de Bachiller, perito agrónomo, Bachiller en Ciencias, Licenciado en Ciencias Exactas, y Arquitecto; así como sus sucesivos puestos en las Universidades de Madrid y Valencia. Pero sorprendentemente no hace la menor mención al título de Doctor. En cuanto a la relación con la obra de Staudt, explica: "*La labor más meritoria del señor Torroja consiste en haber sido el iniciador y propulsor de la moderna tendencia en orden a la Geometría. (...) Acomete con denuedo el insigne Catedrático de la Universidad Central la obra renovadora que concibiera, pasando de los procedimientos de Monge al empleo de los recursos que la homografía y la dualidad proporcionan, y que ya habían pasado la frontera por conducto de la obra magistral de Chasles, para terminar en los puramente geométricos que introduce, siguiendo al eminente Staudt en su importantísima obra Geometrie der Lage. En el curso 1884 a 1885, el señor Torroja explica su primer curso de Geometría descriptiva, tal como lo había concebido*". Explica también Vegas que en 1899 publicó Torroja el "*Tratado de la Geometría de la Posición y sus aplicaciones a la Geometría de la Medida*", en el que se expone la "*concepción verdaderamente genial de los eminentes profesores de la universidad de Erlangen Paulus y Staudt*". Ya en 1888 había introducido la geometría proyectiva de Staudt con el "*Programa y resumen de las lecciones de Geometría descriptiva*", apuntes litografiados, como recoge Garma en [25].

La conclusión ha de ser que, por supuesto, Staudt no dirigió la tesis doctoral de Torroja. Ni en la época existía el director de tesis en España, ni la tesis era un trabajo de investigación, ni hubiera sido concebible un director extranjero. Y lo que es peor, y sin duda definitivo. Staudt había fallecido en 1867. Y también, que sólo con el más laxo de los conceptos, cabe interpretar la relación científica entre Staudt y Torroja como de maestro y discípulo.

Para terminar con Torroja, recogeremos como hemos hecho con sus herederos, los discípulos que MGP le reconoce, varios de los cuales ya han aparecido con anterioridad. Por orden cronológico, Miguel Vegas y Cecilio Jiménez Rueda (ambos 1888), José Gabriel Alvarez Ude (sin fecha, pero como hemos visto, hacia 1900), Sixto Cámara (1908) y Julio Rey Pastor (1909). En este momento, MGP atribuye a Rey Pastor 1052 descendientes doctorales, lo que sumados a los 673 de Alvarez Ude (648 por vía de Bachiller, como veíamos antes, y 25 por la de Ancochea), y 5 de Miguel Vegas, da a D. Eduardo Torroja un total de 1713 descendientes.

14. La línea alemana

Como hemos visto, y entendemos que con un exceso de voluntarismo, MGP enlaza a D. Eduardo Torroja, el *antecesor* de la gran mayoría de los matemáticos españoles, con Karl Georg Christian von Staudt (1798-1867). Curiosamente, es el único discípulo suyo que incluye. Staudt, a su vez, se doctoró en 1822 en Erlangen con un trabajo sobre asteroides, dirigido por Carl Friedrich Gauss.

Naturalmente, al llegar a Gauss (1777-1855), ya se entronca con toda la matemática alemana de los siglos XVIII y XIX. En su tesis doctoral de 1799, en la Universidad de Helmstedt, "*Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse*", demostró el Teorema fundamental del álgebra. Alumnos doctorales suyos fueron, además de Staudt, Friedrich Bessel (1810), Christian Gerling (1812), Johann Encke (1825), Moritz Stern (1829), Sophie Germain (1830), Johann Listing (1834), Moritz Wichmann (1843), Bernhard Riemann (1851) y Julius Wilhelm Richard Dedekind (1852). No hace falta añadir nada, sino reseñar que, a su vez, el director de Gauss fue Johann Friedrich Pfaff.

Pfaff (1765-1825) se doctoró en Göttingen en 1786, con una tesis titulada "*Commentatio de ortibus et occasibus siderum apud auctores classicos commemoratis*". Además de Gauss, discípulos doctorales suyos fueron Karl Mollweide (1796), Johann Bartels (1799), August Möbius (1815) y Johann Grunert (1820). Como maestros de Pfaff, MGP recoge a Abraham Gotthelf Kästner y Johann Elert Bode.

Y así continúa remontando la línea a través de los siglos, hasta llegar, en lo más lejano que he localizado, a un astrónomo greco-bizantino, Gregory Choniades (hacia 1240 - hacia 1320), discípulo a su vez de Shams ad-Din al-Bukhari, astrónomo persa del siglo XIII. Parece claro que pretender retrotraer el historial de nuestros doctores a estas zonas es como ver a Julio César proclamarse descendiente de Eneas, y, por lo tanto, de la diosa Venus.

Pero, en cambio, sí que sería urgente completar la labor de reconstrucción de los doctorados españoles, al menos en Matemáticas que es un campo bastante tasado y pequeño, a partir del Real Decreto de 1847 de Nicomedes Pastor Díaz.

He dicho.

Referencias

[1] A. Bacelo, *Los grupos de género imaginario menor que* 10. Trabajo de Fin de Master, Universidad Complutense, 2013. http://eprints.ucm.es/25482

[2] A. Bacelo, *Sobre el género imaginario de grupos finitos.* Tesis Doctoral. Universidad Complutense, 2015. http://eprints.ucm.es/33708

[3] A. Bacelo, The full group of automorphisms of non-orientable unbordered Klein surfaces of topological genus 6. Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Math. RACSAM. (Aparecerá).

[4] A. Bacelo, J. J. Etayo, E. Martínez, Filling gaps of the symmetric crosscap spectrum. Preprint (2017).

[5] E. Bujalance, Normal NEC signatures. Illinois J. Math. **26** (1982) 519-530.

[6] E. Bujalance, Cyclic groups of automorphisms of compact non-orientable Klein surfaces without boundary. Pacific J. Math. **109** (1983) 279-289.

[7] E. Bujalance, F. J. Cirre, M. D. E. Conder, Extensions of finite cyclic group actions on non-orientable surfaces. Trans. Amer. Math. Soc. **365** (2013) 4209-4227.

[8] E. Bujalance, J. J. Etayo, J. M. Gamboa, G. Gromadzki, *Automorphisms groups of compact bordered Klein surfaces. A combinatorial approach*. Lecture Notes in Math., vol. 1439. Springer, Berlin. (1990)

[9] E. Bujalance, J. J. Etayo, E. Martínez, The full group of automorphisms of non-orientable unbordered Klein surfaces of topological genus 3, 4 and 5. Rev. Mat. Complut. **27** (2014) 305-326.

[10] E. Bujalance, G. Gromadzki, On nilpotent groups of automorphisms of Klein surfaces. Proc. Amer. Math. Soc. **108** (1990) 749-759.

[11] E. Bujalance, E. Martínez, A remark on NEC groups representing surfaces with boundary. Bull. London Math. Soc. **21** (1989) 263-266.

[12] M. D. E. Conder, Generators for alternating and symmetric groups. J. London Math. Soc. (2) **22** (1980) 75-86.

[13] M. D. E. Conder,
https://www.math.auckland.ac.nz/∼conder/CrosscapNumberSmallGroups127.txt

[14] M. D. E. Conder,
https://www.math.auckland.ac.nz/∼conder/GroupsWithCrosscapNumber 3to65.txt

[15] M. D. E. Conder, Large group actions on surfaces. Contemp. Math. **629** (2014) 77-97.

[16] M. D. E. Conder, P. Dobcsanyi, Determination of all regular maps of small genus. J. Comb. Theory Ser. B **81** (2001) 224-242.

[17] H. S. M. Coxeter, The abstract groups $G^{m,n,p}$. Trans. Amer. Math. Soc. **45** (1939) 73-150.

[18] L. Español, M. A. Martínez, Tomás Rodríguez Bachiller (1899-1980). Gac. R. Soc. Mat. Esp. **13** (2010) 769-795.

[19] J. L. Estévez, M. Izquierdo, Non-normal pairs of non-Euclidean crystallographic groups. Bull. Lond. Math. Soc. **38** (2006) 113-123.

[20] J. J. Etayo, *Sobre grupos de automorfismos de superficies de Klein.* Tesis doctoral. Universidad Complutense. 1983.

[21] J. J. Etayo, E. Martínez, The symmetric crosscap number of the groups $C_m \times D_n$. Proc. Royal Soc. Edinburgh. **138A** (2008) 1197-1213.

[22] J. J. Etayo, E. Martínez, The action of the groups $D_m \times D_n$ on unbordered Klein surfaces. Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Math. RACSAM **105** (2011) 97-108

[23] J. J. Etayo, E. Martínez, The symmetric crosscap number of the families of groups $DC_3 \times C_n$ and $A_4 \times C_n$. Houston J. Math. **38** (2012) 345-358.

[24] J. J. Etayo, E. Martínez, The symmetric crosscap number of the groups of small order. J. Algebra Appl. **12** (2013) 1250164.

[25] S. Garma,Torroja Caballé, Eduardo.
http://www.mcnbiografias.com/app-bio/do/show?key=torroja-caballe-eduardo

[26] G. Gromadzki, Abelian groups of automorphisms of compact non-orientable Klein surfaces without boundary. Comment. Math. Prace Mat. **28** (1989) 197-217.
[27] G. Gromadzki, Supersoluble groups of automorphisms of nonorientable Riemann surfaces. Bull. London Math. Soc. **22** (1990) 561-568.
[28] G. Gromadzki, On soluble groups of automorphisms of nonorientable Klein surfaces. Fund. Math. **141** (1992) 215-227.
[29] W. Hall, *Automorphisms and coverings of Klein surfaces*. Doctoral Thesis. University of Southampton. 1977.
[30] A. M. Macbeath, On a curve of genus 7. Proc. London Math. Soc. (3) **15** (1965) 527-542.
[31] A. M. Macbeath, The classification of non-Euclidean crystallographic groups. Canad. J. Math. **19** (1967) 1192-1205.
[32] C. L. May, The symmetric crosscap number of a group. Glasgow Math. J. **41** (2001) 399-410.
[33] C. L. May, J. Zimmerman, The group of symmetric Euler characteristic -3. Houston J. Math. **27** (2001) 737-752.
[34] F. Navarro Borrás, Don José María Plans y Freyre. Anales Univ. Madrid, Ciencias **3** (1934) 230-247.
[35] E. Outerelo, *Evolución histórica de la Licenciatura en Matemáticas (Exactas) en la Universidad Central*. Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Complutense. 2009.
[36] J. Rey Pastor, *Correspondencia entre formas de primera categoría y aplicación al estudio de algunas de segunda*. Tesis Doctoral. Universidad de Madrid, 1909. Edición facsímil, introd. J. J. Etayo, Universidad Complutense (1988).
[37] D. Singerman, Automorphisms of compact non-orientable Riemann surfaces. Glasgow Math. J. **12** (1971) 50-59.
[38] D. Singerman, On the structure of non-Euclidean crystallographic groups. Proc. Camb. Phil. Soc. **76** (1974) 233-240.
[39] T. W. Tucker, Symmetric embeddings of Cayley graphs in non-orientable surfaces. In: I. Alavy et al. (eds.) *Graph theory, Combinatorics and Applications*. 1991, pp. 1105-1120.
[40] M. Vegas, D. Eduardo Torroja. Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. **17** (1918) 136-141.
[41] H. C. Wilkie, On non-Euclidean crystallographic groups. Math. Z. **91** (1966) 87-102.

CONTESTACIÓN
DEL
EXCMO. SR. DR.
D. ARTURO ROMERO SALVADOR

La Real Academia de Doctores de España abre sus puertas para dar posesión, como Académico de Número, al Profesor D. Javier Etayo Gordejuela que viene a ocupar la medalla número 55, vacante por fallecimiento de D. Amando Garrido Pertierra, del que seguimos manteniendo el recuerdo de sus valores humanos y de su trabajo en esta Institución.

Me corresponde el honor de contestar, en nombre de nuestra Corporación, el discurso de ingreso del nuevo Académico. Asumo con satisfacción la tarea encomendada por nuestro Presidente y trataré de exponer la trayectoria científica y profesional del recipiendario y de comentar su discurso. Soy consciente de que mi legitimación se debe más al vínculo de amistad con el Dr. Etayo que a mis conocimientos del campo científico al que ha dedicado gran parte de su vida.

Pertenece el Dr. Etayo a una dinastía matemática española que ha sabido mantener el prestigio de una escuela en la que han aprendido muchos de nuestros matemáticos en las últimas décadas. Su padre, D. Javier Etayo Miqueo, excelente profesor de matemáticas y ejemplo de bondad, fue un maestro excepcional que tuvieron Javier y su hermano Fernando. De él, aprendieron rigor y tenacidad en el quehacer diario, sentido de la disciplina y capacidad organizativa.

Javier Etayo nació en Madrid en 1957, y después de finalizar el bachillerato acude a la universidad para encontrar la respuesta a la vocación que sentía por Matemáticas. Estudió en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, obteniendo la Licenciatura en 1979, con un expediente que le hizo acreedor a la calificación de Sobresaliente. En 1983 se doctoró en la misma universidad con la Tesis titulada "Sobre grupos de automorfismos de superficies de Klein", obteniendo el Premio Extraordinario de Doctorado. Profesor Ayudante y Profesor Titular Interino de Geometría y Topología en la Universidad Complutense. Desde 1986 Profesor Titular de Álgebra en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense y actualmente Catedrático de Álgebra.

A lo largo de su carrera docente, ha trabajado en Geometría y Topología y posteriormente en Algebra, impartiendo asignaturas como Geometría, Topología, Álgebra, Métodos Matemáticos y sus Aplicaciones o Teoría Elemental de Números. Comparando el título de su primer libro de 1987, Teoría Elemental de Grupos, con el del último, Elementos de Matemáticas y sus Aplicaciones, podría deducirse que su interés se ha ido desplazando desde los fundamentos hacia sus aplicaciones. Lo mismo ocurre con el título de su último proyecto de investigación financiado, en el que añade al de Geometría Real, el término de Aplicaciones, por primera vez en los proyectos en los que ha participado. Sin embargo, las dos últimas tesis doctorales que ha dirigido, una "Sobre el género real de grupos finitos" y la otra "Sobre el género imaginario de grupos finitos", y los trabajos de fin de Master y de fin de Grado, ponen de manifiesto que nunca ha abandonado el trabajo en la teoría de grupos.

El profesor Etayo se ha interesado por la evolución de las materias de su especialidad y por la formación que deben alcanzar los estudiantes en la Universidad. Ha sido miembro del Comité Evaluador de Ciencias Experimentales de la Agencia de Calidad, Acreditación y Prospectiva de las Universidades de Madrid y ha participado en el programa ACADEMIA de la Agencia Nacional de Evaluación, Calidad y Acreditación. Los equipos de investigación a los que ha pertenecido tienen nombres en los que se repiten los términos Geometría, Álgebra y Algoritmos. Su trabajo ha sido bien valorado porque, sistemáticamente, sus propuestas han obtenido financiación en convocatorias competitivas. De la mano de su historial investigador puede hacerse un recorrido por las entidades oficiales españolas que han aportado los fondos para que las Universidades pudieran desarrollar sus proyectos: Comisión Asesora de Investigación Científica y Técnica, Comisión Interministerial de la Ciencia y la Tecnología, Dirección General de Enseñanza Superior e Investigación Científica, Dirección General de Universidades, Dirección General de Investigación, Dirección General de Investigación Científica y Técnica. El cambio de nombre del organismo estatal encargado de financiar y gestionar gran parte de la actividad investigadora universitaria debe estar originado por el carácter oscilante de algunos elementos de nuestro sistema de I+D, o quizás por su naturaleza topológica en el que se logra la equivalencia mediante cualquier transformación que conserve, como ocurre en geometría, los parámetros y las medidas fundamentales.

Los trabajos científicos que el Profesor Etayo ha publicado en importantes revistas de Matemáticas muestran que su actividad investigadora ha girado alrededor del tema de su Tesis Doctoral, las superficies de Klein. Si su primer trabajo de 1984 se titula "Klein surfaces with maximal symmetry and their groups of automorphisms" "Superficies de Klein con simetría máxima y sus grupos de automorfismos", el último de 2016 tiene como título "Automorphism groups of non-orientable elliptic-hyperelliptic Klein surfaces with boundary". "Grupos de automorfismos de superficies de Klein elípticas-hiperelípticas no orientables con borde". No cabe duda que hizo una buena elección cuando comenzó a trabajar en uno de los temas centrales de matemáticas, en el que es preciso dominar técnicas algebraicas, geométricas, topológicas, analíticas, numéricas y, además, conocer y aplicar la gran variedad de interacciones que se originan entre ellas.

Junto a sus actividades docentes e investigadoras, Javier Etayo ha desarrollado una importante y extensa labor de gestión académica en los puestos de responsabilidad que ha ocupado en distintos órganos de gobierno de la Universidad Complutense. Ha sido Secretario Académico de Departamento, Inspector de Servicios, Adjunto al Defensor Universitario, Director Académico del Vicerrectorado de Alumnos, Director del Centro de Estudios Superiores Felipe II de Aranjuez, centro adscrito a la Universidad, y Vicerrector de Desarrollo Estatutario y Claustro. Es probable que en el desempeño de estos cargos descubriera la necesidad de completar su formación. Decidió estudiar Derecho en la Universidad Nacional de Educación a Distancia y obtuvo la Licenciatura en el año 2000. El trabajo que ha desarrollado en estos cargos ha sido valorado y reconocido por la Universidad Complutense con la Medalla de Servicios Prestados y la Medalla de Honor.

La primera parte del discurso que acaba de ofrecernos ha girado en torno a conceptos profundos y complejos de las Superficies de Riemann y de Klein, íntimamente relacionados con el trabajo de investigación que ha desarrollado a lo largo de su carrera.

La noción común del espacio en el que se sitúan los objetos y en el que tienen lugar los fenómenos que observamos en la naturaleza, al que denominamos espacio material, debe sustituirse por otro concepto del espacio, espacio físico, para que puedan realizarse estudios científicos. Es este un espacio abstracto, en el que los objetos, trayectorias y fenómenos que se observan en el espacio material se sustituyen por elementos idealizados, al transformarlos en puntos, planos y curvas. Mientras que en la primera forma de concebir el espacio, espacio material, se utilizan técnicas experimentales, en la segunda, espacio físico, se trabaja con técnicas geométricas, es decir, con técnicas deductivas. La validez del espacio abstracto, que hemos denominado físico, depende de que represente unívocamente al espacio material. Inicialmente este espacio abstracto era euclidiano y se pensaba que sus proposiciones (enunciación de una verdad demostrada o que se pretende demostrar) eran consecuencia de los postulados (proposición cuya verdad se admite sin pruebas para servir de base en ulteriores razonamientos) porque con él se describían los hechos del espacio real. No es extraño que la necesidad de la geometría para estudiar el mundo físico hiciera, a pesar de que utilizaba métodos propios y diferentes a los de las ciencias físicas, que se la considerara una ciencia natural.

Cuando se utilizaron las técnicas desarrolladas por los geómetras para trabajar en el espacio euclidiano, con otra finalidad distinta, como es la de explorar la existencia de otros espacios diferentes, van apareciendo nuevos espacios que son correctos en su formulación matemática, aunque no representan el espacio material que nos rodea. Estos hallazgos, los nuevos espacios, han surgido sin que se haya buscado su vinculación con el mundo natural, por lo que podemos considerarlos espacios matemáticos. Con ello y por derecho propio, la geometría deja de ser una ciencia natural para formar una parte de las matemáticas. Las ciencias físicas comprueban experimentalmente que el espacio de la naturaleza no es el espacio material que se pensaba y que se describía con el espacio euclidiano, sino que es más parecido a los espacios matemáticos que se han deducido con métodos geométricos. Por tanto, la matemática, que nace para representar las observaciones de objetos y fenómenos naturales, es capaz de crear representaciones que tienen su propia dinámica y que a veces aportan soluciones a problemas surgidos en el mundo físico.

Mientras que las ciencias físicas describen la naturaleza mediante el lenguaje matemático, la matemática explora estructuras lógicas. Mientras que el trabajo en las ciencias del mundo físico, incluido el mundo de la física teórica que especula con entidades abstractas, debe validarse con la comprobación experimental, el trabajo en matemáticas está destinado a crear conceptos propios y a descubrir sus propiedades; es por tanto un producto abstracto que no necesita ni referencia, ni comprobación con los datos que podemos obtener en el mundo material.

A mediados del siglo XIX empieza a desarrollarse la idea de superficies de Riemann ligadas a una determinada función, hiperbólica, parabólica o elíptica. Posteriormente, se realiza el estudio de estas superficies de manera abstracta, como variedades independientes de las funciones que les dieron origen, utilizando un componente algebraico y un componente analítico-geométrico. Después, aparecen otras superficies como la superficie de Klein. Estas últimas corresponden a curvas algebraicas reales mientras que las de Riemann corresponden a curvas algebraicas complejas. El estudio de este tipo de superficies se basa en conceptos complejos, como superficies no orientables, superficies abiertas, grupo de automorfismos o estructuras di-analíticas.

Independientemente de la belleza intelectual que tienen para los especialistas e incluso la estética para los profanos, como ocurre con la botella de Klein, el conocimiento de estas superficies y de sus propiedades es necesario para facilitar la comprensión de los fenómenos más difíciles de describir, que van apareciendo en diferentes campos científicos a medida que mejora nuestra comprensión del mundo. Por ejemplo, la teoría de estas superficies se utiliza en un modelo fundamental de la física teórica, la teoría de cuerdas, donde se considera que las partículas materiales son estados vibracionales de un objeto más básico llamado cuerda, o de la teoría topológica cuántica de campo, usada en física de la materia condensada.

Un breve comentario sobre la segunda parte de su discurso en la que realiza un estudio original sobre el desarrollo de su especialidad científica a través de las tesis doctorales defendidas en nuestro país. Recientemente, la Real Academia de Doctores de España ha promovido un informe sobre Análisis y revalorización de los estudios de doctorado en España. Javier

Etayo ya había mostrado su interés por la historia académica, como se deduce de su artículo "Julio Rey Pastor, 125 años" o del libro "Universidad Complutense de Madrid: de la Edad Media al III Milenio". En su discurso de ingreso en nuestra Academia, ha mostrado, por medio de los autores y directores de las tesis doctorales, la cadena que se estableció entre profesores y alumnos de matemáticas a lo largo de una centuria y ha recopilado los requisitos que ha ido estableciendo la legislación para poder presentar y defender la memoria que permite obtener el grado de Doctor. El concepto de tesis doctoral, de director de tesis o de tribunal, ha ido cambiando desde 1901 pero estos cambios parecen encaminados a la búsqueda de aportaciones originales en las memorias, a la adecuada formación del doctor y a disponer de métodos de evaluación capaces de garantizar la calidad de estos trabajos. Esta evolución ha ido conduciendo a un procedimiento, que se va generalizando en el campo científico, similar al de países avanzados y que permite la homologación internacional de nuestras tesis. Así, una vez propuesto el tema y planificada su tesis, el doctorando dispone de autonomía para aprender en distintos centros y trabajar con distintos expertos, pero, antes de presentar la memoria, debe haber publicado varios trabajos en revistas de la especialidad, sujetas a evaluación por pares.

La Sección de Ciencias Experimentales no tenía un Doctor en Matemáticas desde el fallecimiento de Sixto Ríos Ínsua el 11 de Junio de 2008. Con la llegada de Javier Etayo, la Academia cubre la ausencia en esta disciplina al incorporar un matemático, conocedor de su materia, estudioso y trabajador. En nombre de la Real Academia de Doctores de España te doy la bienvenida y estoy seguro que serás generoso con tu tiempo en pro de los objetivos institucionales.